ΘΕΩΡΗΜΑ (ΑΡΧΗ) ΤΟΥ FERMAT

Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{a<b}$. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f:(a,b)\to\mathbb{R}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\xi \in \mathbf{(a,b)}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο ξ, τότε $\mathbf{f'(\xi)=0}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ DARBOUX

Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{a<b}$. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f:(a,b)\to\mathbb{R}}$ είναι παραγωγίσιμη τότε το σύνολο τιμών $\mathbf{f'((a,b))}$ της $\mathbf{f'}$ είναι διάστημα.

✦ Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να έχει και τη παρακάτω διατύπωση.
Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ *με* $\mathbf{a<b}$. *Αν η συνάρτηση* $\mathbf{f:[a,b]\to\mathbb{R}}$ *είναι παραγωγίσιμη και* $\mathbf{f'(a)\neq f'(b)}$, *τότε για κάθε* $\mathbf{k}$ *μεταξύ των* $\mathbf{f'(a)}$ *και* $\mathbf{f'(b)}$ *υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi \in \mathbf{(a,b)}$ *ώστε* $\mathbf{f'(\xi)=k}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE

Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{a<b}$. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f:[a,b]\to\mathbb{R}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[a,b]}$, παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(a,b)}$ και $\mathbf{f(\alpha)=f(b)}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbf{(a,b)}$ ώστε $\mathbf{f'(\xi)=0}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (LAGRANGE)

Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{a<b}$. Αν η συνάρτηση $\mathbf{f:[a,b]\to\mathbb{R}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[a,b]}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{(a,b)}$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbf{(a,b)}$ ώστε $\mathbf{f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}$.

✦ Το θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE είναι γενίκευση του θεωρήματος του ROLLE. Αν στο θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE ισχύει $\mathbf{f(a)=f(b)}$, τότε προφανώς προκύπτει το θεώρημα του ROLLE.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (CAUCHY)

Έστω $\mathbf{a,b} \in \mathbb{R}$ με $\mathbf{a<b}$. Αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g:[a,b]\to\mathbb{R}}$ είναι συνεχείς στο $\mathbf{[a,b]}$ και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{(a,b)}$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \mathbf{(a,b)}$ ώστε $\mathbf{f'(\xi)(g(b)-g(a))=g'(\xi)(f(b)-f(a))}$.

✦ Το γενικευμένο θεώρημα της μέσης τιμής του CAUCHY είναι γενίκευση του θεωρήματος του LAGRANGE. Αν στο θεώρημα της μέσης τιμής του CAUCHY θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\mathbf{g(x)=x}$ τότε προφανώς προκύπτει το θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE.

✦ Όταν $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,b)$, τότε το παραπάνω θεώρημα μπορεί να έχει και τη παρακάτω διατύπωση.
Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ *με* $a<b$. *Αν οι συναρτήσεις* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *είναι συνεχείς στο* $[a,b]$ *και παραγωγίσιμες στο* (a,b), *τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον* $\xi\in(a,b)$ *ώστε* $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ (FLETT)

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a)=f'(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{αν } x\in(a,b]\\ f'(a) & \text{αν } x=a\end{cases}.$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to a^-}g(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=g(a)$.
Άρα η g είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) με

$$g'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-\big(f(x)-f(a)\big)}{(x-a)^2}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $\xi\in(a,b)$ ώστε $\boxed{g'(\xi)=0\quad ???}$.
Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{αν } x\in[a,b)\\ f'(b) & \text{αν } x=b\end{cases}.$$

Ισχύει $\lim\limits_{x\to b^-}g(x)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)=h(b)$.
Άρα η h είναι συνεχής στο $[a,b]$.

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=g(x)-h(x)$, έχουμε:

Η φ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και

$$\varphi(a)\cdot\varphi(b)=\big(g(a)-h(a)\big)\big(g(b)-h(b)\big)=$$

$$=\left(f'(a)-\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(b)\right)=$$

$$=-\left(f'(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)^2\leq 0.$$

Αν $\varphi(a)\cdot\varphi(b)=0$ τότε $f'(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0\Leftrightarrow g(a)=g(b)$.

Οπότε για την g ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος του ROLLE στο $[a,b]$, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε $\boxed{g'(\xi)=0\quad !!!}$.

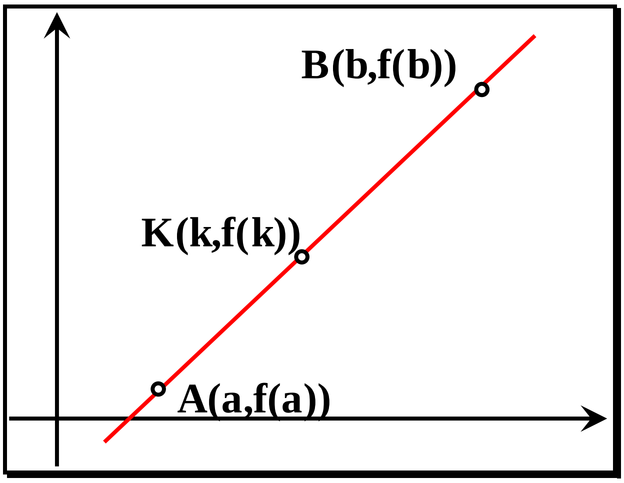
Αν όμως $\varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$ τότε θα υπάρχει (σύμφωνα με το θεώρημα BOLZANO) $k\in(a,b)$ ώστε:

$$\varphi(k)=0\Leftrightarrow g(k)-h(k)=0\Leftrightarrow g(k)=h(k)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(k)-f(a)}{k-a}=\frac{f(k)-f(b)}{k-b}.$$

Από την τελευταία ισότητα, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $A(a,f(a))$, $K(k,f(k))$ και $B(b,f(b))$ είναι συνευθειακά, οπότε θα ισχύει επιπλέον:

$$\frac{f(k)-f(a)}{k-a}=\underbrace{\frac{f(k)-f(b)}{k-b}}_{g(k)}=\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{g(b)}.$$



Άρα $g(k)=g(b)$.

Η $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $[k,b]$
Η $\mathbf{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο (k,b)
$g(k)=g(b)$

Θεώρημα ROLLE

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του ROLLE θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(k,b)$ τέτοιο ώστε $\boxed{g'(\xi)=0 \quad !!!}$.

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(a)=f'(b)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(b)}{\xi-b}.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Εφαρμόζουμε ανάλογη διαδικασία με τη προηγούμενη άσκηση.

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη και περιττή συνάρτηση. Αποδείξτε ότι για κάθε $a>0$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(\xi)+f(a)}{\xi+a}.$$

ΥΠΟΔΕΙΞΗ

Αν η συνάρτηση f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια. Οπότε για κάθε $a>0$ θα ισχύει: $f'(-a)=f'(a)$. Εφαρμόζοντας ανάλογη διαδικασία στο $[-a,a]$, έχουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Αν η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και υπάρχει $k\in(a,b]$ ώστε $f'(k)=0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{b-a}$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x)=f(x)-\int_a^x \frac{f(t)-f(a)}{b-a}dt$.

Η συνάρτηση $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ με

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(x)-f(a)}{b-a}.$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ τέτοιο ώστε

$$\boxed{g'(\xi)=0 \quad ???}.$$

Εφόσον $f'(k)=0$ και $k\in(a,b]$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$f'(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(a,k).$$

(Διότι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο $\lambda\in(a,k)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda)=0$, τότε μπορούμε να θέσουμε στη θέση του k το λ)

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση ($f'(a)\neq 0$)

Αν $f'(a)\neq 0$, τότε θα ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[a,k)$.

Άρα η f' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a,k)$ και έστω ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[a,k)$.

Για τη συνάρτηση g θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} g'(k)&=f'(k)-\frac{f(k)-f(a)}{b-a}=-\frac{f(k)-f(a)}{b-a}<0\\ g'(a)&=f'(a)-\frac{f(a)-f(a)}{b-a}=f'(a)>0\end{aligned}\right\}\rightarrow g'(a)\cdot g'(k)<0$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του DARBOUX θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,k)$ τέτοιο ώστε $\boxed{g'(\xi)=0 \quad !!!}$.

Δεύτερη περίπτωση ($f'(a)=0$)

Αν $f'(a)=0$, τότε θα ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(a,k)$.

Άρα η f' θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (a,k) και έστω ότι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(a,k)$.

Για τη συνάρτηση g θα έχουμε:

$$g'(k)=f'(k)-\frac{f(k)-f(a)}{b-a}=-\frac{f(k)-f(a)}{b-a}<0\Leftrightarrow\boxed{g'(k)<0 \quad (A)}.$$

Εφόσον $f'(a)=f'(k)=0$, θα υπάρχει (σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του FLETT) $m\in(a,k)$ τέτοιο ώστε $f'(m)=\dfrac{f(m)-f(a)}{m-a}$.

Για τη συνάρτηση g θα έχουμε:

$$g'(m)=f'(m)-\frac{f(m)-f(a)}{b-a}=\frac{f(m)-f(a)}{m-a}-\frac{f(m)-f(a)}{b-a}=$$

$$=\big(f(m)-f(a)\big)\frac{b-m}{(m-a)(b-a)}>0\Leftrightarrow\boxed{g'(m)>0 \quad (B)}.$$

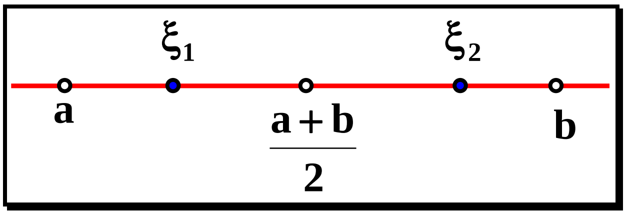
Απο τις σχέσεις (A) και (B) έχουμε $g'(m)\cdot g'(k)<0$.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του DARBOUX θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(m,k)$ τέτοιο ώστε $\boxed{g'(\xi)=0 \quad !!!}$.

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a)=f(b)$.
Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Εφαρμόζουμε για τη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ το θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE στα διαστήματα $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ και $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.



$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[a,\frac{a+b}{2}\right] \\ \text{Η } f \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \left(a,\frac{a+b}{2}\right)\end{array}\right\}$$

Θ.Μ.Τ LAGRANGE

Άρα σύμφωνα με το το Θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE θα υπάρχει

$\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$ ώστε $\boxed{f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{b-a}{2}}}$ (A).

$$\left.\begin{array}{l}\text{Η } f \text{ είναι συνεχής στο } \left[\frac{a+b}{2},b\right] \\ \end{array}\right\}$$

Θ.Μ.Τ LAGRANGE

Η $\mathbf{f}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{a+b}{2},b\right)$

Άρα σύμφωνα με το το Θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE θα υπάρχει $\xi_2 \in \left(\frac{a+b}{2},b\right)$ ώστε $\boxed{f'(\xi_1)=\dfrac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\frac{b-a}{2}}}$ $\mathbf{(B)}$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις $\mathbf{(A)}$ και $\mathbf{(B)}$ παίρνουμε:

$$f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0.$$

> Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ και παραγωγίσιμη στο (a,b) με $f(a)=f(b)$.
> Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\in(a,b)$ ώστε
> $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+\cdots+f'(\xi_n)=0$.

> **Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση και $0<x_1<x_2<1$. Αν $f(0)=f(x_1)=0$ και $f(x_2)=x_2$, αποδείξτε ότι για κάθε $a\in(0,1)$ υπάρχει $b\in(0,1)$ ώστε $f'(b)=a$**

Παρατηρήσεις

✦ Για τον πρώτο τρόπο λύσης, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του DARBOUX:
Αν $a<b$, και η συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη, τότε το σύνολο τιμών $f'((a,b))$ της f' είναι διάστημα.

✦ Για τον δεύτερο τρόπο λύσης, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα (αρχή) του FERMAT:
Έστω $a<b$, $x\in(a,b)$ και η συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο x. Αν το $x\in(a,b)$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f στο (a,b), τότε $f'(x)=0$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Πρώτος τρόπος

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,x_1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,x_1)$ και $f(0)=f(x_1)=0$.

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του ROLLE θα υπάρχει $\xi_1 \in (0, x_1)$ ώστε: $f'(\xi_1) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_2)$.
Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα της μέσης τιμής του LAGRANGE θα υπάρχει $\xi_2 \in (0, x_2)$ ώστε: $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x_2) - f(0)}{x_2 - 0} = \dfrac{x_2}{x_2} = 1$.
Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του DARBOUX,
για κάθε $a \in (0,1) = \left(f'(\xi_1), f'(\xi_2)\right)$ θα υπάρχει b μεταξύ των ξ_1 και ξ_2 ώστε: $f'(b) = a$.

Δεύτερος τρόπος
Έστω $a \in (0,1)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - ax$.
Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $g'(x) = f'(x) - a$.
Ισχύουν τώρα οι σχέσεις:

$$g(0) = f(0) - a \cdot 0 = 0$$
$$g(x_1) = f(x_1) - ax_1 = 0 - ax_1 = -ax_1 < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - ax_2 = x_2 - ax_2 = (1-a)x_2 > 0.$$

Δηλαδή η g (που είναι συνεχής στο $[0,1]$) θα παρουσιάζει ακρότατο σε κάποιο $b \in (0,1)$.
Άρα απο το Θεώρημα (αρχή) του FERMAT θα ισχύει: $g'(b) = 0$.

Τρίτος τρόπος
Έστω $a \in (0,1)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:[0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - ax$.
Η g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $[0,1]$ με $g'(x) = f'(x) - a$.
Ισχύουν τώρα οι σχέσεις:

$$g(x_1) = f(x_1) - ax_1 = 0 - ax_1 = -ax_1 < 0$$
$$g(x_2) = f(x_2) - ax_2 = x_2 - ax_2 = (1-a)x_2 > 0.$$

Άρα συμφωνα με το Θεώρημα του BOLZANO,
θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε: $g(\xi) = 0$.
Για τη g ισχύει το Θεώρημα του ROLLE στο $[0, \xi]$, οπότε θα υπάρχει $b \in (0, \xi)$ ώστε $g'(b) = 0$, δηλαδή θα υπάρχει $b \in (0,1)$ ώστε $f'(b) = a$.