Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, τέμνουν το κύκλο $c(O,R)$ στα σημεία Δ, E και Z αντίστοιχα. Από το σημείο Z, θεωρούμε παράλληλη στην $A\Gamma$, που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο M. Από το σημείο E, θεωρούμε παράλληλη στην AB, που τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο N. Αποδείξτε ότι:

α) Τα τετράπλευρα $BMOZ$ και ΓNOE είναι εγγράψιμα σε κύκλους (έστω) (c_1) και (c_2) αντίστοιχα.

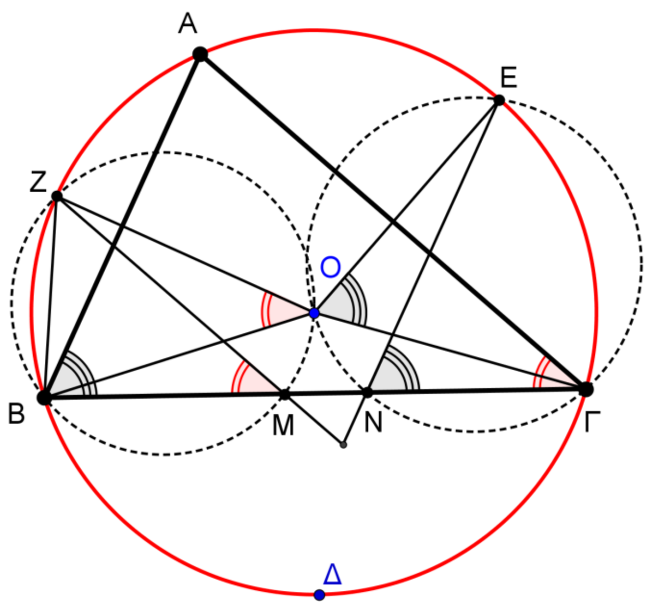
β) Το δεύτερο κοινό σημείο (έστω K) των κύκλων (c_1) και (c_2) ανήκει στο κύκλο με κέντρο το σημείο Δ και ακτίνα ΔI (όπου I το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$).

__Λύση__

α) Εφόσον η ZM είναι παράλληλη στην $A\Gamma$, θα ισχύει: $Z\hat{M}B = A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}$.

Η γωνία $Z\hat{O}B$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνει στο τόξο ZB (που είναι το μισό του τόξου AB). Άρα $Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$.

Από τις ισότητες των γωνιών $Z\hat{M}B = Z\hat{O}B = \hat{\Gamma}$, προκύπτει ότι το τετράπλευρο $BMOZ$ είναι εγγράψιμο.



Εφόσον η EN είναι παράλληλη στην AB, θα ισχύει: $E\hat{N}\Gamma = A\hat{B}\Gamma = \hat{B}$.

Η γωνία $E\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(O,R)$ και βαίνει στο τόξο $E\Gamma$ (που είναι το μισό του τόξου $A\Gamma$). Άρα $E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$.

Από τις ισότητες των γωνιών $E\hat{N}\Gamma = E\hat{O}\Gamma = \hat{B}$, προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΓNOE είναι εγγράψιμο.

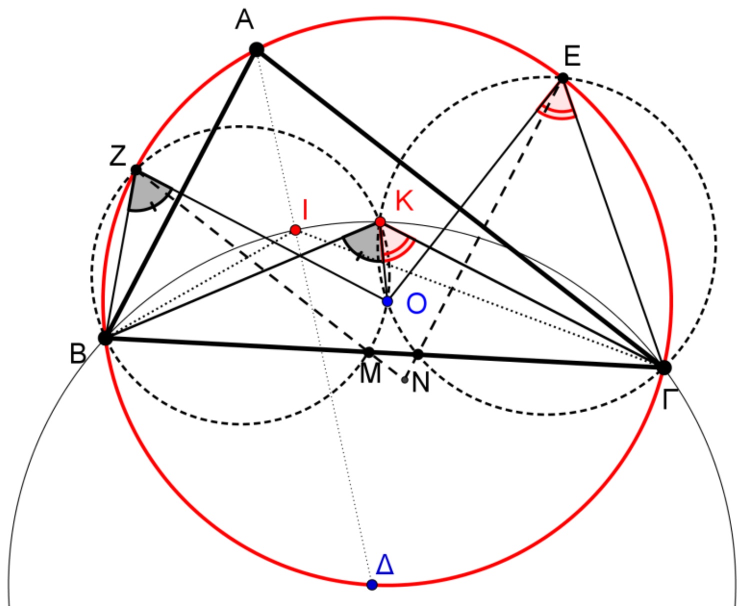
β) Εφόσον I είναι το έκκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$, θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\Delta\hat{I}B = \Delta\hat{B}I = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2} \text{ και } \Delta\hat{I}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}I = \frac{\hat{A}+\hat{\Gamma}}{2}.$$

Από τις προηγούμενες ισότητες προκύπτει ότι $\varDelta B = \varDelta I = \varDelta \varGamma$ και $B\hat{I}\varGamma = \hat{A} + \dfrac{\hat{B}+\hat{\varGamma}}{2}$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι τα σημεία $B, I, K, \varGamma$ είναι ομοκυκλικά, δηλαδή ότι:

$$B\hat{K}\varGamma = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\varGamma}}{2} = B\hat{I}\varGamma .$$



Το τρίγωνο OBZ είναι ισοσκελές $(OB = OZ = R)$, με $B\hat{O}Z = \hat{\varGamma}$. Άρα $B\hat{Z}O = 90^o - \dfrac{\hat{\varGamma}}{2}$.

Το τρίγωνο $O\varGamma E$ είναι ισοσκελές $(O\varGamma = OE = R)$, με $\varGamma\hat{O}E = \hat{B}$. Άρα $\varGamma\hat{E}O = 90^o - \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Ισχύουν διαδοχικά οι ισότητες:

$$B\hat{K}\varGamma = O\hat{K}B + O\hat{K}\varGamma = B\hat{Z}O + \varGamma\hat{E}O = 90^o - \frac{\hat{\varGamma}}{2} + 90^o - \frac{\hat{B}}{2} = 180^o - \frac{\hat{B}+\hat{\varGamma}}{2} =$$

$$= \hat{A} + \hat{B} + \hat{\varGamma} - \frac{\hat{B}+\hat{\varGamma}}{2} = \hat{A} + \frac{\hat{B}+\hat{\varGamma}}{2} = B\hat{I}\varGamma .$$