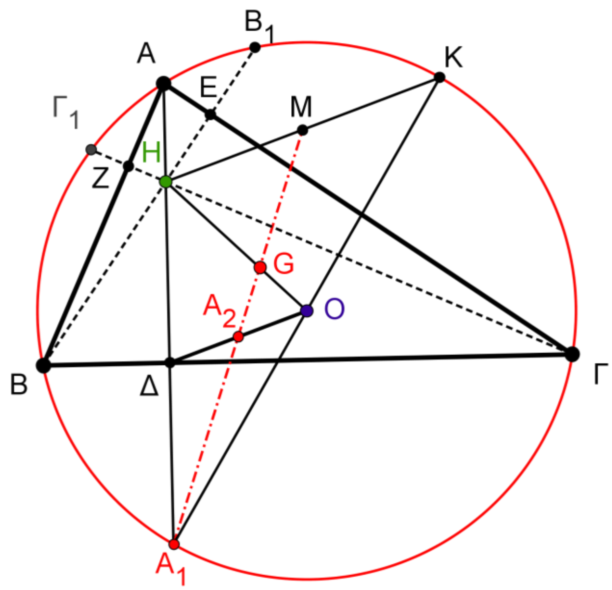
Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Τα ύψη του $ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ$ τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία $A_1,B_1,Γ_1$ αντίστοιχα. Αν $A_2,B_2,Γ_2$ είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $ΟΔ,ΟΕ,ΟΖ$ αντίστοιχα, αποδείξτε ότι οι ευθείες $A_1A_2,B_1B_2,Γ_1Γ_2$ περνάνε από το βαρύκεντρο G του τριγώνου $ΑΒΓ$.

<u>Λύση</u>

<u>1ος τρόπος</u>

Έστω K το αντιδιαμετρικό του σημείου A_1 και M το σημείο τομής της A_1A_2 με την HK.



Τότε στο τρίγωνο A_1HK έχουμε:

1) Το σημείο O είναι μέσο της πλευράς A_1K.

2) Το σημείο $Δ$ είναι μέσο της πλευράς A_1H .**(*)**

Άρα το τμήμα $ΟΔ$ είναι ίσο και παράλληλο με το τμήμα $\frac{HK}{2}$.

Εφόσον τώρα $ΟΔ=\frac{HK}{2}$ και η A_1A_2 είναι διάμεσος στο τρίγωνο $A_1ΟΔ$, συμπεραίνουμε ότι η A_1M είναι διάμεσος του τριγώνου A_1HK.

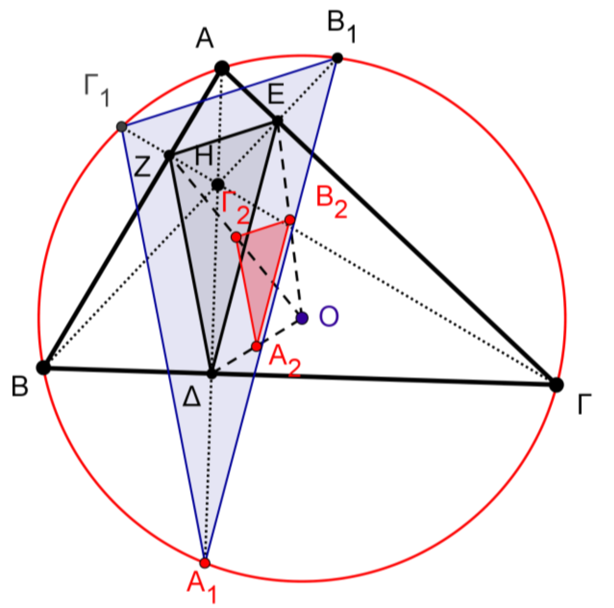
Έστω ότι οι διάμεσες A_1M και HO (του τριγώνου A_1HK) τέμνονται στο σημείο G.

Τότε θα ισχύει $GH=2GO$ και επειδή το σημείο G ανήκει στην ευθεία HO (ευθεία EULER του τριγώνου $ΑΒΓ$) θα ταυτίζεται με το βαρύκεντρο του τριγώνου $ΑΒΓ$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι B_1B_2, $Γ_1Γ_2$ διέρχονται από το σημείο G.

(*) Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του.

$2^{ος}$ τρόπος (με ομοιοθεσία)



Χρησιμοποιώντας τη πρόταση: "Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του", συμπεραίνουμε ότι το Δ είναι μέσο του A_1H, το E είναι μέσο του B_1H και το Z είναι μέσο του Γ_1H.

Άρα το τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ είναι ομοιόθετο του (ορθικού) τριγώνου ΔEZ στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H και λόγο 2 ($HA_1 = 2H\Delta$).

Το A_2 είναι μέσο του $O\Delta$, το B_2 είναι μέσο του OE και το Γ_2 είναι μέσο του OZ.

Άρα το ορθικό τρίγωνο ΔEZ, είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_2B_2\Gamma_2$ στην ομοιοθεσία με κέντρο το O και λόγο 2 ($O\Delta = 2OA_2$).

Δηλαδή το τρίγωνο $A_2B_2\Gamma_2$ είναι ομοιόθετο του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$.

Άρα οι ευθείες $A_1A_2, B_1B_2, \Gamma_1\Gamma_2$ (που συνδέουν τις ομόλογες κορυφές) θα συντρέχουν στο κέντρο της ομοιοθεσίας (έστω K) το οποίο θα βρίσκεται επάνω στην OH.

Επειδή όμως $A_1B_1 = 2\Delta E = 4A_2B_2$, συμπεραίνουμε ότι $OK = 3OH$ δηλαδή το σημείο K, ταυτίζεται με βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$.