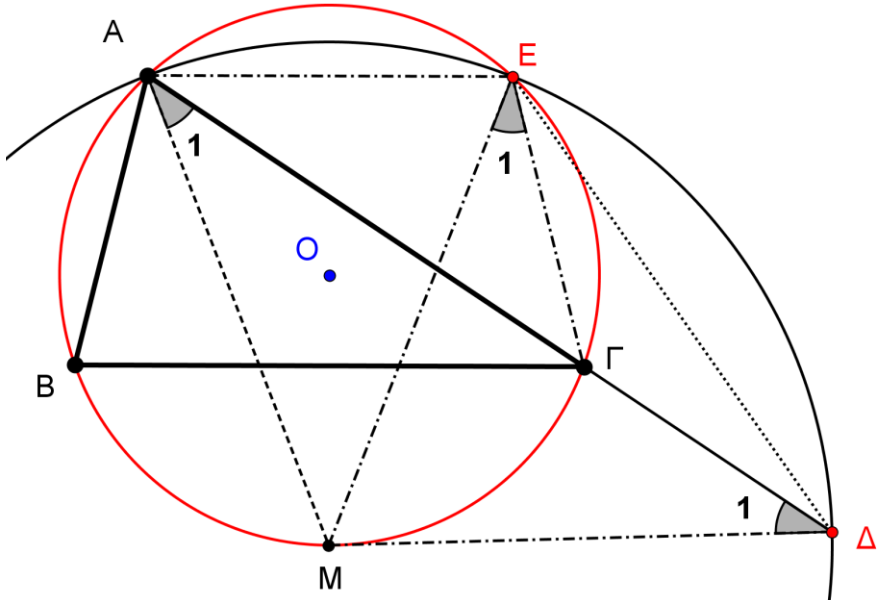
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει το κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο M. Ο κύκλος $c_1(M, AM)$ τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο Δ. Αποδείξτε ότι $\Gamma\Delta = AB$.

Λύση

1^{ος} Τρόπος

Έστω E το δεύτερο κοινό σημείο των περιφερειών (c) και (c_1). Τότε η AE είναι η κοινή χορδή των δύο κύκλων, άρα η OM είναι μεσοκάθετος της AE.



Το M είναι το μέσο του τόξου $B\Gamma$ (διότι η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$). Άρα η OM είναι μεσοκάθετος και της $B\Gamma$.

Εφόσον οι χορδές $B\Gamma$ και AE έχουν την OM κοινή μεσοκάθετο, συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Οπότε:

$$AB = E\Gamma \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $MA\Delta$ είναι ισοσκελές ($MA = M\Delta$: ακτίνες του κύκλου (c_1)). Άρα $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$.

Ισχύει επίσης $\hat{A}_1 = \hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ (εγγεγραμμένες στον κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο $M\Gamma$).

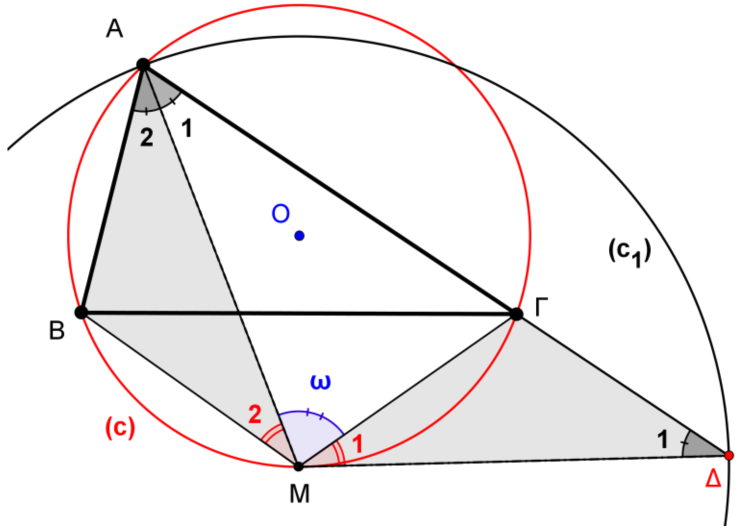
Από τις τελευταίες ισότητες γωνιών συμπεραίνουμε $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ και σε συνδυασμό με την ισότητα $M\hat{\Delta}E = M\hat{E}\Delta$ (που προκύπτει από το ισοσκελές τρίγωνο $M\Delta E$), καταλήγουμε στην ισότητα των γωνιών $\Gamma\hat{\Delta}E = \Gamma\hat{E}\Delta$ και στην ισότητα των ευθυγράμμων τμημάτων:

$$E\Gamma = \Delta\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε το ζητούμενο.

$2^{ος}$ Τρόπος

Το τρίγωνο $AM\Delta$ είναι ισοσκελές ($MA = M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)).



Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{\Delta}_1 = \dfrac{\hat{A}}{2}$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AM\Delta$, έχουμε: $\hat{M}_1 + \hat{\omega} = A\hat{M}\Delta = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{\Delta}_1 = 180^o - \hat{A}$.

Άρα $\hat{M}_1 + \hat{\omega} = 180^o - \hat{A} \Leftrightarrow \hat{M}_1 = 180^o - \hat{A} - \hat{\omega}$.

Ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$\hat{B} = \hat{\omega}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο)

$\hat{M}_2 = \hat{\Gamma}$ (είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο ίδιο τόξο).

Άρα $\hat{M}_1 = 180^o - \hat{A} - \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{M}_2$.

Από τις ισότητες: $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, $MB = M\Gamma$ (διότι το M είναι μέσο του τόξου $B\Gamma$) και $MA = M\Delta$ (διότι $MA, M\Delta$ ακτίνες του κύκλου (c_1)), συμπεραίνουμε ότι τα τρίγωνα MAB και $M\Delta\Gamma$ (*) είναι ίσα, οπότε $\Gamma\Delta = AB$.

(*) Η ισότητα των τριγώνων, μπορεί να αποδειχθεί και με άλλους τρόπους.

Παρατηρήσεις-Συμπληρώσεις

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι τα σημεία M, Γ και το μέσο της ΔE είναι συνευθειακά.

Ο κύκλος (c_1) τέμνει και τη προέκταση της AB. Αν ονομάσουμε Λ το σημείο τομής, τότε θα ισχύει $B\Lambda = A\Gamma$. Έτσι δημιουργείτε το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta\Lambda$ με $A\Delta = A\Lambda = AB + A\Gamma$ και στη συνέχεια, μπορούμε να αποδείξουμε ότι $AM \perp \Delta\Lambda$