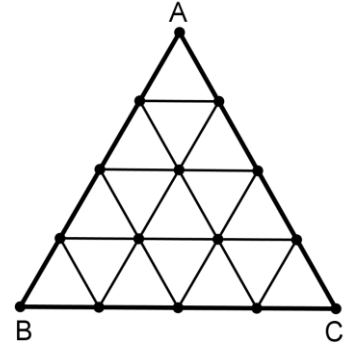


Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABC του οποίου κάθε πλευρά υποθέτουμε ότι έχει μήκος $k > 0$. Σε κάθε πλευρά του τριγώνου θεωρούμε $n-1$ σημεία που την χωρίζουν σε n ίσα τμήματα. Ενώνουμε τα $n-1$ σημεία της μίας πλευράς με τα $n-1$ σημεία της άλλης πλευράς έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα που δημιουργούνται να είναι παράλληλα με τη τρίτη πλευρά του τριγώνου. Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο ABC , χωρίζεται σε n^2 (μικρότερα) ισόπλευρα τρίγωνα των οποίων κάθε πλευρά έχει μήκος $\frac{k}{n}$. Το διπλανό σχήμα είναι ένα



παράδειγμα για $n=4$. Θεωρούμε τώρα το σημειοσύνολο S που αποτελείται από τις κορυφές του τριγώνου ABC , από τα $n-1$ σημεία που έχουμε θεωρήσει επάνω σε κάθε πλευρά και από τα σημεία που τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα. Με κορυφές τα σημεία του σημειοσυνόλου S , δημιουργούνται ρόμβοι τύπου M που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{k}{n}$ και ρόμβοι τύπου

D που οι πλευρές τους έχουν μήκος $\frac{2k}{n}$. Αν m είναι το πλήθος των ρόμβων τύπου M και d το πλήθος των ρόμβων τύπου D , να βρεθεί η σχέση που εκφράζει τη διαφορά $m-d$ συναρτήσει του n (n ακέραιος μεγαλύτερος του 1).

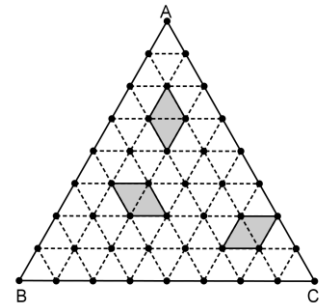
Λύση

Κάθε ευθύγραμμο τμήμα μήκους $\frac{k}{n}$ (που δεν ανήκει στις πλευρές του τριγώνου) είναι η διαγώνιος ενός και μόνο ρόμβου τύπου M . Για να υπολογίσουμε λοιπόν το πλήθος των ρόμβων τύπου M , αρκεί να υπολογίζουμε το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που δημιουργούνται στο εσωτερικό του τριγώνου από την τομή των ευθυγράμμων τμημάτων που ενώνουν τα σημεία των πλευρών.

Τα τμήματα που είναι παράλληλα με τη πλευρά BC είναι:

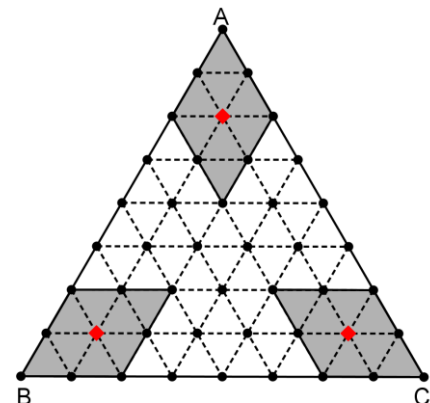
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Άρα το συνολικό πλήθος των ρόμβων τύπου M είναι: $m = 3 \frac{n(n-1)}{2}$.

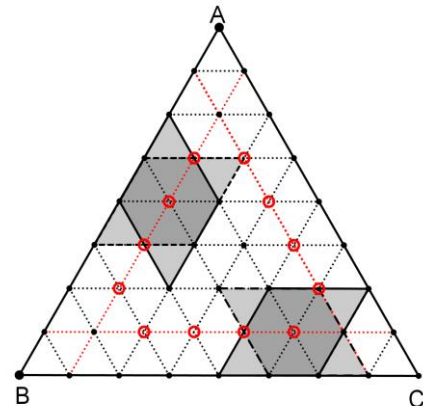


Για την μέτρηση των ρόμβων τύπου D θα χωρίσουμε τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου σε τρεις κατηγορίες.

Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα ενός και μόνο ρόμβου τύπου D . Αυτά είναι πάντοτε τρία (δηλαδή είναι τρία για κάθε n). Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.

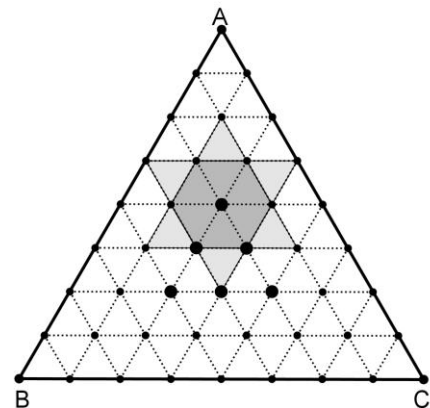


Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από εκείνα τα σημεία που είναι κέντρα δύο και μόνο ρόμβων τύπου D . Τα σημεία αυτά βρίσκονται στα ευθύγραμμα τμήματα που είναι παράλληλα και πλησιέστερα προς τις πλευρές. Σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα υπάρχουν $n-4$ σημεία. Άρα συνολικά θα έχουμε $3(n-4)$ σημεία αυτής της κατηγορίας. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.



Η Τρίτη κατηγορία τέλος αποτελείται από τα υπόλοιπα σημεία που είναι κέντρα τριών ρόμβων τύπου D . Αυτά τα σημεία είναι $1+2+3+\dots+(n-5) = \frac{(n-5)(n-4)}{2}$.

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται τα σημεία αυτά για $n=8$.



Με τη βοήθεια των προηγούμενων παρατηρήσεων, καταλήγουμε στον υπολογισμό όλων των ρόμβων τύπου D , που είναι:

$$d = 3 + 3(n-4)2 + 3 \frac{(n-5)(n-4)}{2} = \frac{3}{2}(2 + (n-1)(n-4)).$$

(Προφανώς για $n=2$ και $n=3$, ισχύει $d=0$).

Εκτελώντας πράξεις, καταλήγουμε $m-d = 3(2n-3)$.