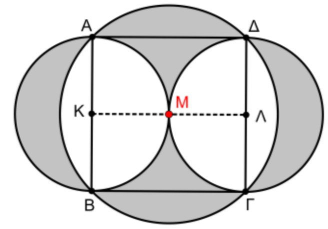
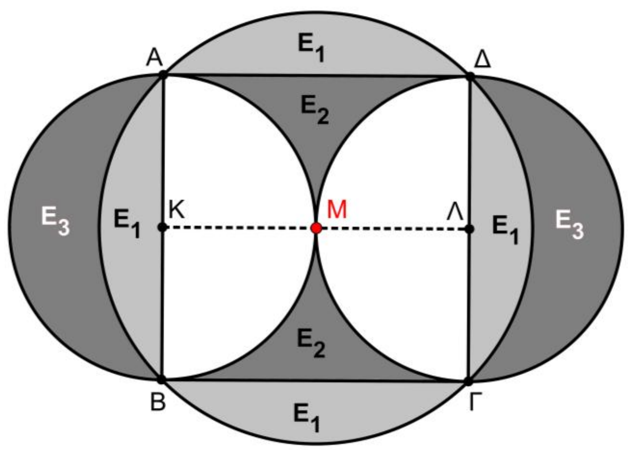
Στο διπλανό σχήμα, οι μικροί κύκλοι είναι ίσοι μεταξύ τους (με ακτίνα R), έχουν κέντρα τα σημεία K,Λ και εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο M. Οι διάμετροι AB και $\Gamma\Delta$ (των μικρών κύκλων) είναι κάθετες στην διάκεντρό τους $K\Lambda$. Ο μεγάλος κύκλος τέλος, έχει κέντρο το σημείο M και περνάει από τα σημεία A,B,Γ,Δ. Να υπολογιστεί συναρτήσει του R, το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου.



<u>Λύση</u>

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο με πλευρά $2R$ και εμβαδό: $(AB\Gamma\Delta)=4R^2$.

Το τρίγωνο AKM είναι ορθογώνιο με κάθετες πλευρές $KA=KM=R$. Άρα (από το Πυθαγόρειο θεώρημα) έχουμε: $MA=MB=M\Gamma=M\Delta=R\sqrt{2}$. Δηλαδή ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $R\sqrt{2}$ και κατά συνέπεια το εμβαδό του θα είναι: $E=\pi(R\sqrt{2})^2=2\pi R^2$.



Τα εμβαδά των δύο μικτόγραμμων χωρίων $MA\Delta$ και $MB\Gamma$ είναι ίσα μεταξύ τους και το άθροισμά τους προκύπτει, αν από το εμβαδό του τετραγώνου αφαιρέσουμε το εμβαδό των δύο μικρών ημικυκλίων (δηλαδή το εμβαδό του μικρού κύκλου).

Με βάση τους παραπάνω συλλογισμούς προκύπτουν οι σχέσεις:

$$2E_2=(AB\Gamma\Delta)-\pi R^2 \Leftrightarrow 2E_2=4R^2-\pi R^2 \Leftrightarrow E_2=\frac{4-\pi}{2}R^2.$$

Για τα εμβαδά των χωρίων έχουμε: $E_3=\dfrac{\pi R^2}{2}-E_1$.

Άρα το εμβαδό του ζητούμενου χωρίου είναι:

$$2E_1+2E_2+2E_3=2E_1+(4-\pi)R^2+\pi R^2-2E_1=4R^2.$$

Παρατήρηση

Το εμβαδό ενός από τα τέσσερα ίσα κυκλικά τμήματα του μεγάλου κύκλου είναι:

$$E_1=\frac{E-(AB\Gamma\Delta)}{4}=\frac{2\pi R^2-4R^2}{4}.$$

Ο υπολογισμός όμως δεν είναι απαραίτητος διότι απλοποιείται με τις πράξεις.