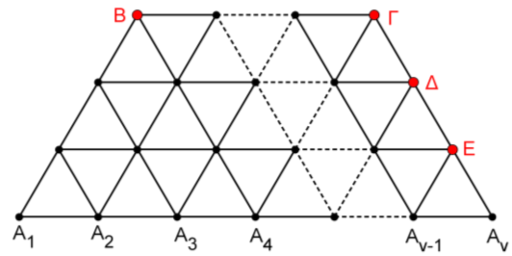
Το ισοσκελές τραπέζιο (που φαίνεται στο διπλανό σχήμα) αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1B έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του A_1A_ν έχει μήκος $\nu-1$. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή λοξά δεξιά). Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία B,Γ,Δ,E. Όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.



<u>Λύση</u>

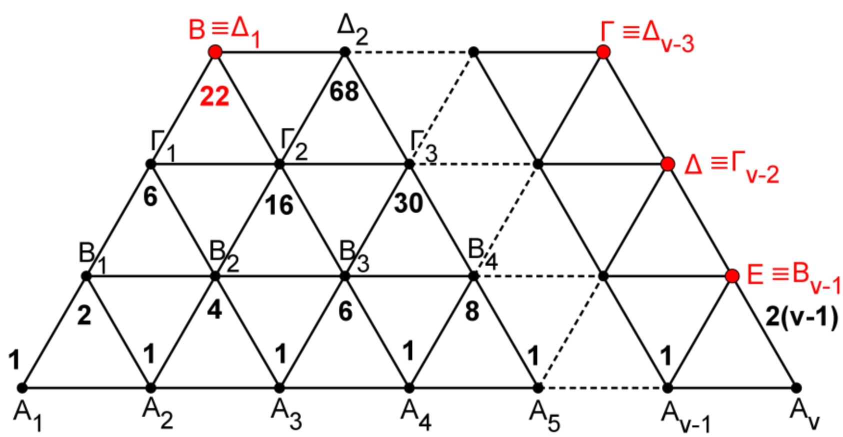
Στη μεγάλη βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $A_1,A_2,A_3,\ldots,A_\nu$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $B_1,B_2,B_3,\ldots,B_{\nu-1}\equiv E$.

Στην επόμενη προς τα άνω γραμμή υπάρχουν τα σημεία $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\ldots,\Gamma_{\nu-2}\equiv \Delta$.

Στη μικρή τέλος βάση του τραπεζίου υπάρχουν τα σημεία $B\equiv \Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\ldots,\Delta_{\nu-3}\equiv \Gamma$.

Θα συμβολίζουμε με μικρά (πεζά) γράμματα το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε τα αντίστοιχα σημεία (που συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα).



Πχ: Με β_1 συμβολίζουμε το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να προσεγγίσουμε το σημείο B_1.

Προφανώς $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\cdots=\alpha_\nu=1$, διότι τα αντίστοιχα σημεία μπορούν να προσεγγιστούν με ένα μόνο τρόπο (δεδομένου ότι μπορούμε να κινηθούμε μόνο προς τα δεξιά για την προσέγγισή τους).

Σε κάθε άλλη περίπτωση, οι τρόποι προσέγγισης προκύπτουν από το άθροισμα των τρόπων προσέγγισης σημείων, γειτονικών προς τα αριστερά και προς τα κάτω (κάτω αριστερά και κάτω δεξιά). Έτσι έχουμε:

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2$$

$$\beta_2=\beta_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+a_2+\alpha_2+\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(\alpha_1+\alpha_3)$$

$$\beta_3=\beta_2+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_1+2a_2+\alpha_3+\alpha_3+\alpha_4=\alpha_1+2(a_2+\alpha_3)+\alpha_4=2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_1+\alpha_4)$$

Άρα $\beta_k = 2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_{k+1}) - (\alpha_1+\alpha_{k+1}) = 2(k+1)-2 = 2k \qquad k=1,2,3,\ldots,(\nu-1)$.
Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε τους τρόπους προσέγγισης των σημείων της τρίτης από κάτω γραμμής και της μικρής βάσης.

$$\begin{aligned}\gamma_i &= 2(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots+\beta_{i+1})-(\beta_1+\beta_{i+1}) =\\ &= 2(2+4+\cdots+2(i+1))-(2+2i+2)=\\ &= 4(1+2+\cdots+(i+1))-(4+2i)=\\ &= 2(i+1)(i+2)-2(i+2)=\\ &= 2i(i+2) \qquad i=1,2,3,\ldots,(\nu-2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta_m &= 2(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\cdots+\gamma_{m+1})-(\gamma_1+\gamma_{m+1})=\\ &= 4\underbrace{\big(1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)\big)}_{S}-2\big(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\big)=\\ &= 4\frac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}-2\big(1\cdot 3+(m+1)(m+3)\big)=\\ &\qquad \text{(…και μετά από πράξεις, καταλήγουμε …)}\\ &= \frac{2}{3}m(2m^2+12m+19) \qquad m=1,2,3,\ldots,(\nu-3).\end{aligned}$$

Τελικά έχουμε: $\beta = 22$, $\gamma = \frac{2}{3}(\nu-3)(2\nu^2+1)$, $\delta = 2\nu(\nu-2)$ και $\varepsilon = 2(\nu-1)$.

<u>Υπολογισμός του αθροίσματος</u>: $S = 1\cdot 3+2\cdot 4+\cdots+(m+1)(m+3)$.
Χρησιμοποιώντας την ισότητα $x(x+2)=x^2+2x$ για $x=1, x=2\ldots, x=m$, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}1\cdot 3 &= 1^2+2\cdot 1\\ 2\cdot 4 &= 2^2+2\cdot 2\\ 3\cdot 5 &= 3^2+2\cdot 3\\ &\vdots\\ m(m+2) &= m^2+2m\end{aligned}\right\} \Rightarrow S_1 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+2\frac{m(m+1)}{2} = \frac{m(m+1)(2m+7)}{6}.$$

Θέτουμε όπου m το $m+1$ και έχουμε $S = \dfrac{(m+1)(m+2)(2m+9)}{6}$.