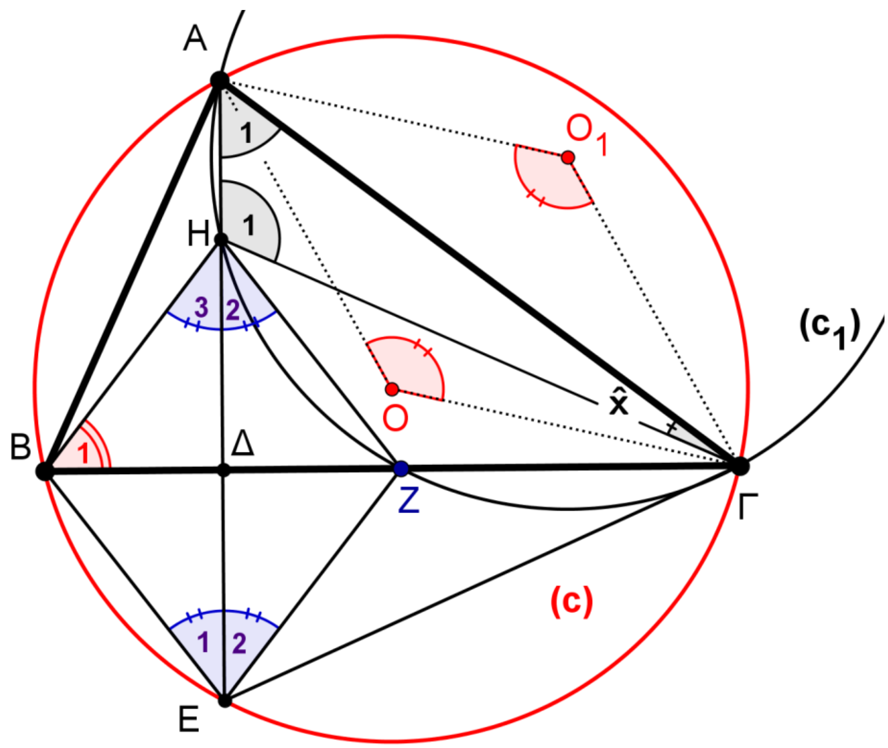
Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma < B\Gamma$, εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$, (με κέντρο O και ακτίνα R). Έστω O_1 το συμμετρικό του O ως προς την $A\Gamma$. Ο κύκλος $c_1(O_1,R)$ (με κέντρο το O_1 ακτίνα R), τέμνει την $B\Gamma$ στο Z. Αν το ύψος $A\Delta$ τέμνει (προεκτεινόμενο) τον περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο E, να αποδείξετε ότι η $E\Gamma$ είναι κάθετη στην AZ.

Λύση



Εφόσον O_1 είναι το συμμετρικό του O ως προς την $A\Gamma$ και $OA = O\Gamma = R$, το τετράπλευρο $AO\Gamma O_1$ είναι ρόμβος πλευράς R. Άρα ο κύκλος $c_1(O_1,R)$ θα περνάει από τα σημεία A και Γ.

Έστω τώρα ότι ο κύκλος $c_1(O_1,R)$ τέμνει την $A\Delta$ στο σημείο H.

Θα αποδείξουμε ότι το σημείο H είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και στη συνέχεια ότι το σημείο Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AE\Gamma$.

Η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι επίκεντρη στον κύκλο $c(O,R)$ οπότε: $A\hat{O}\Gamma = 2\hat{B}$.

Η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι ίση με τη γωνία $A\hat{O}_1\Gamma$ (απέναντι γωνίες του ρόμβου $AO\Gamma O_1$). Άρα:

$$A\hat{O}\Gamma = A\hat{O}_1\Gamma = 2\hat{B}.$$

Η γωνία $\hat{H}_1$ είναι εγγεγραμμένη στο κύκλο $c_1(O_1,R)$, οπότε: $\hat{H}_1 = 180^o - \dfrac{A\hat{O}_1\Gamma}{2} = 180^o - \hat{B}$.

Από το τρίγωνο $AH\Gamma$ έχουμε:

$$\hat{x} = 180^o - \hat{A}_1 - \hat{H}_1 = 180^o - (90^o - \hat{\Gamma}) - (180^o - \hat{B}) =$$

$$= \hat{B} + \hat{\Gamma} - 90^o = 180^o - \hat{A} - 90^o = 90^o - \hat{A}.$$

Άρα $\Gamma H \perp AB$, οπότε το H είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ και κατά συνέπεια $BH \perp A\Gamma$.

Ισχύουν τώρα οι παρακάτω ισότητες γωνιών.

$\hat{H}_2 = \hat{\Gamma}$ (διότι η γωνία $\hat{H}_2$ είναι εξωτερική στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AHZ\Gamma$).

$\hat{E}_1 = \hat{\Gamma}$ (διότι είναι εγγεγραμμένες στο κύκλο (c) και βαίνουν στο τόξο AB).

$\hat{H}_3 = 90^o - \hat{B}_1 = 90^0 - (90^o - \hat{\Gamma}) = \hat{\Gamma}$.

Από τις παραπάνω ισότητες γωνιών, προκύπτει ότι το τετράπλευρο $HBEZ$ είναι ρόμβος.

Άρα $\left.\begin{matrix} HB \parallel ZE \\ HB \perp A\Gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow ZE \perp A\Gamma$. Άρα το Z είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $AE\Gamma$.

Παρατήρηση

Για να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $HBEZ$ είναι ρόμβος, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση: “ Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου τριγώνου, ως προς τις πλευρές του, βρίσκονται επάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο του”.