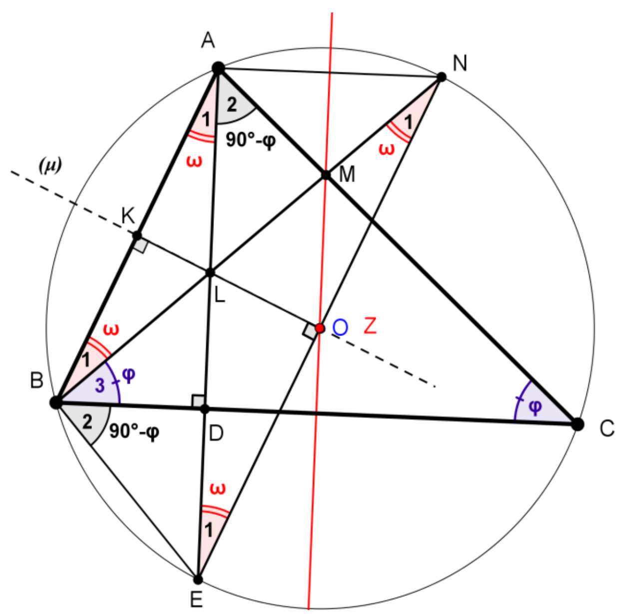
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ABC (με $AB < AC$), εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R). Η προέκταση του ύψους AD τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο E και η μεσοκάθετος (μ) της πλευράς AB τέμνει την AD στο σημείο L. Η BL τέμνει την AC στο σημείο M και το περιγεγραμμένο κύκλο $c(O,R)$ στο σημείο N. Τέλος η EN τέμνει την μεσοκάθετο (μ) στο σημείο Z.
Αποδείξτε ότι: $MZ \perp BC \Leftrightarrow (CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$.
Δηλαδή "η MZ είναι κάθετη στην BC, αν και μόνο αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου $c(O,R)$".

<u>Λύση</u>

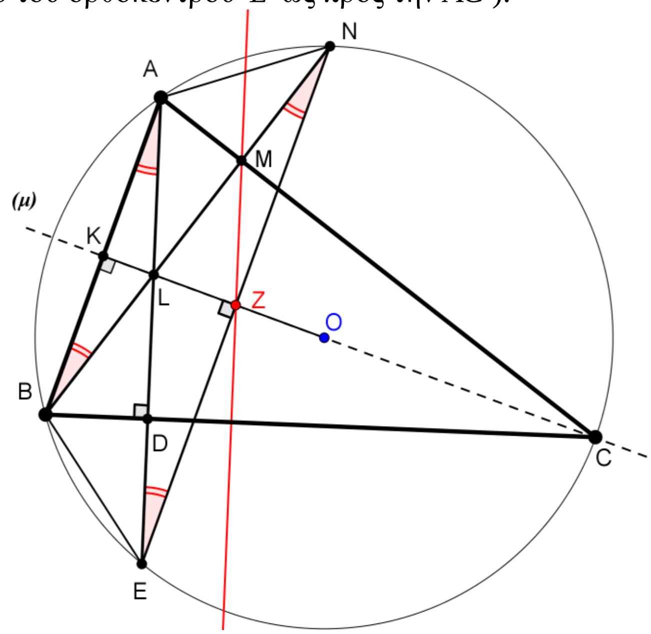
Εφόσον το σημείο L ανήκει στη μεσοκάθετο του AB, θα ισχύει: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\omega}$ και κατά συνέπεια $AN = BE$. Άρα το τετράπλευρο $ABEN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο ($AB // EN$), οπότε η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN και $\hat{E}_1 = \hat{N}_1 = \hat{\omega}$.



Σχήμα 1

Έστω τώρα ότι το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O (**Σχήμα 1**).
Τότε η EN γίνεται διάμετρος του κύκλου, οπότε $E\hat{B}N = \hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$.
Αν $\hat{C} = \hat{\varphi}$ τότε από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABEC$ έχουμε: $\hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 90^o - \hat{\varphi}$.
Από τη τελευταία ισότητα (σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_2 + \hat{B}_3 = 90^o$) έχουμε: $\hat{B}_3 = \hat{\varphi}$.
Άρα το M ανήκει στη μεσοκάθετο του BC ($MB = MC$).
Το σημείο O ανήκει επίσης στη μεσοκάθετο του BC και επειδή ταυτίζεται με το σημείο Z, συμπεραίνουμε ότι η MZ είναι μεσοκάθετος της BC.

Αν τώρα το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$), τότε η μεσοκάθετος (μ) της AB είναι ύψος του τριγώνου ABC (**Σχήμα 2**). Δηλαδή το L είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC και κατά συνέπεια το σημείο M είναι το μέσο του τμήματος LN (η BM είναι ύψος και το σημείο N είναι το συμμετρικό του ορθοκέντρου L ως προς την AC).



Σχήμα 2

Το σημείο Z είναι το μέσο του τμήματος EN (διότι η ευθεία (μ) είναι μεσοκάθετος της EN). Άρα η MZ είναι παράλληλη με την AD.

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η MZ είναι κάθετη στην BC και θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA = CB$) ή το σημείο Z ταυτίζεται με το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου (**Σχήμα 3**).

Έστω λοιπόν ότι η MZ είναι κάθετη στην BC. Τότε η MZ θα είναι παράλληλη με την AE ($MZ // AE$).

Αν T είναι η τομή της MZ με την AN τότε το T είναι το μέσο AN (διότι Z είναι το μέσο της NE και $MZ // AE$). Άρα τα τρίγωνα MTA και MTN έχουν το ίδιο εμβαδό ($E_1 = (MTA) = (MTN) = E_2$).

Από την παραλληλία $MZ // AE$, προκύπτει η “μεταφορά” γωνιών στο τρίγωνο AMN στο οποίο η MT είναι διάμεσος.

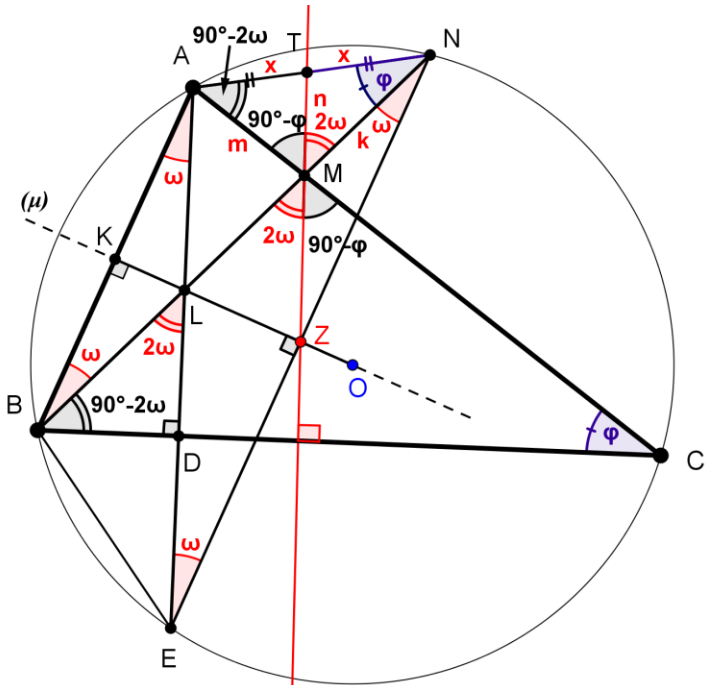
$B\hat{L}D = 2\hat{\omega}$ (διότι η $B\hat{L}D$ είναι εξωτερική γωνία του ισοσκελούς τριγώνου LEN).

$L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$ (διότι $LD // MZ$ οπότε $B\hat{L}D = L\hat{M}Z = 2\hat{\omega}$).

Χρησιμοποιώντας τώρα το γνωστό τύπο $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$ για το εμβαδό τριγώνου, έχουμε:

$$E_1 = \frac{1}{2} mn\eta\mu(90 - \varphi) = \frac{1}{2} mx\eta\mu(90 - 2\omega)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} kn\eta\mu 2\omega = \frac{1}{2} kx\eta\mu\varphi$$



Σχήμα 3

Διαιρώντας κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\,\varphi}{\eta\mu\,2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu\,2\omega}{\eta\mu\,\varphi}\Leftrightarrow \eta\mu\,2\varphi=\eta\mu\,4\omega\,.$$

Από τη τελευταία ισότητα ημιτόνων (και με δεδομένο ότι οι γωνίες ω,φ είναι γωνίες τριγώνου) καταλήγουμε στις ισότητες:

$$2\varphi=4\omega\Leftrightarrow\varphi=2\omega\qquad (A)\ \text{ ή }\ 2\varphi=\pi-4\omega\Leftrightarrow\varphi+2\omega=\frac{\pi}{2}\qquad (B).$$

Από την ισότητα (A) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ισοσκελές ($TM=TN$) και κατά συνέπεια το τρίγωνο AMN είναι ορθογώνιο στο M ($A\hat{M}N=90^o$).
Άρα η BM είναι ύψος του τριγώνου ABC και επομένως το L ορθόκεντρο.
Δηλαδή το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές ($CA=CB$) διότι η μεσοκάθετος KZ είναι και ύψος.

Από την ισότητα (B) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο MTN είναι ορθογώνιο στο T. Δηλαδή η MT είναι μεσοκάθετος της AN. Άρα η MT θα διέρχεται από το O (οπότε $Z\equiv O$).

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u>

Αν το τρίγωνο ABC είναι ισοσκελές με $CA=CB$ και $\hat{C}=\hat{\varphi}=45^o$, τότε τα τρίγωνα TMN, TMA και AMN είναι ορθογώνια και ισοσκελή. Το τετράπλευρο $ABCN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Άρα η TM είναι μεσοκάθετος της BC.
Στη περίπτωση αυτή και το σημείο Z ταυτίζεται με το σημείο O.

Οπότε η διάζευξη των προτάσεων $(CA = CB \quad ή \quad Z \equiv O)$ είναι εγκλειστική.