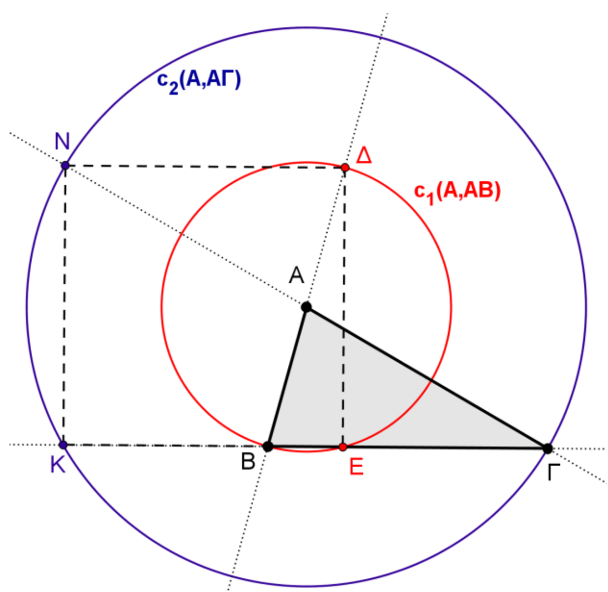
Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι κύκλοι $c_1(A,AB)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_1 = AB$) και $c_2(A,A\Gamma)$ (με κέντρο το σημείο A και ακτίνα $R_2 = A\Gamma$). Ο κύκλος $c_1(A,AB)$ τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο E και την AB στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(A,A\Gamma)$ τέμνει την $B\Gamma$ στο σημείο K και την $A\Gamma$ στο σημείο N. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\Gamma A = \Gamma B$) και $\hat{\Gamma} = 30^o$, αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.

Λύση

Η $B\Delta$ (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_1(A,AB)$, οπότε A είναι το μέσο του $B\Delta$ και $B\hat{E}\Delta = 90^o$.

Η ΓN (από την κατασκευή) είναι διάμετρος του κύκλου $c_2(A,A\Gamma)$, οπότε A είναι το μέσο του ΓN και $\Gamma\hat{K}N = 90^o$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο $N\Delta\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $N\Delta =// B\Gamma$.



Από τη προηγούμενη παραλληλία και την ισότητα των γωνιών $B\hat{E}\Delta = \Gamma\hat{K}N = 90^o$, καταλήγουμε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $NK\Gamma$ ισχύει $\hat{\Gamma} = 30^o$. Άρα $AK = AN = AN = NK$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και την ισότητα $N\Delta = B\Gamma$ (σε συνδυασμό με τις προηγούμενες ισότητες), συμπεραίνουμε ότι το τετράπλευρο ΔEKN είναι τετράγωνο.