Δίνεται τετράπλευρο $ABCD$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O,R)$ και έστω K, L, M, N, S, T τα μέσα των AB, BC, CD, AD, AC και BD αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι τα κέντρα των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων KLS, LMT, MNS και NKT ορίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο όμοιο προς το $ABCD$.

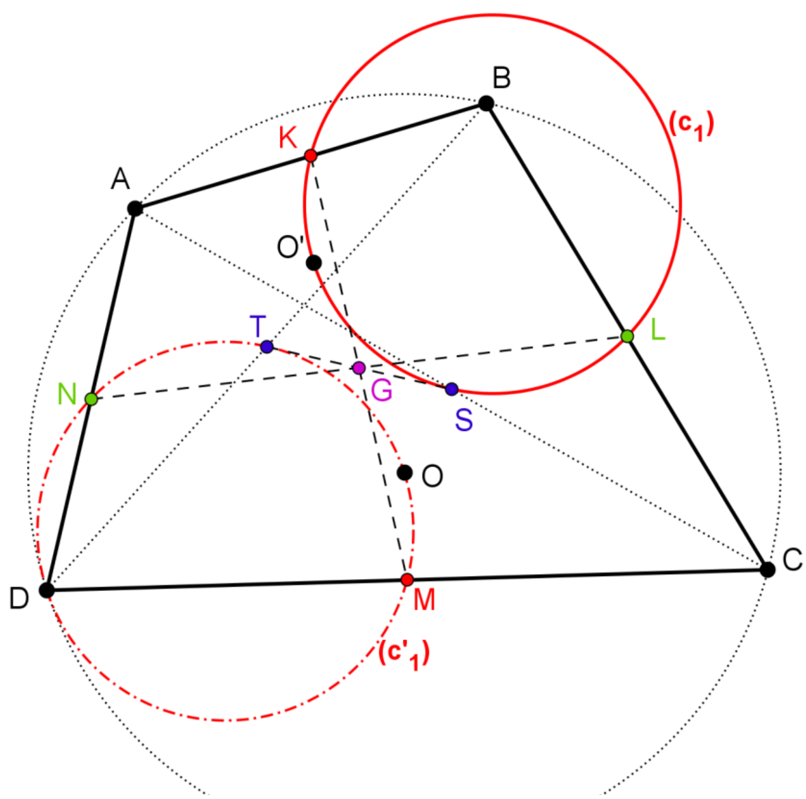
<u>Λύση</u>

Έστω c_1, c_2, c_3, c_4 οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων KLS, LMT, MNS και NKT αντίστοιχα.

$1^{ος}$ Τρόπος

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι τα δημιουργούμενα τετράπλευρα $KLMN$, $TLSN$ και $KSMT$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε οι KM, NL, TS θα διέρχονται από το σημείο G και κατά συνέπεια τα σημεία K,S,L είναι συμμετρικά των σημείων M,T,N αντίστοιχα με κέντρο συμμετρίας το σημείο G (το σημείο αυτό λέγεται σημείο των μέσων).

Έστω τώρα c_1' ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου MTN. Τότε ο c_1' θα διέρχεται από το κέντρο O του κύκλου $c(O,R)$ και θα έχει διάμετρο την $OD = R$ (διότι $O\hat{M}D = O\hat{N}D = 90^o$).



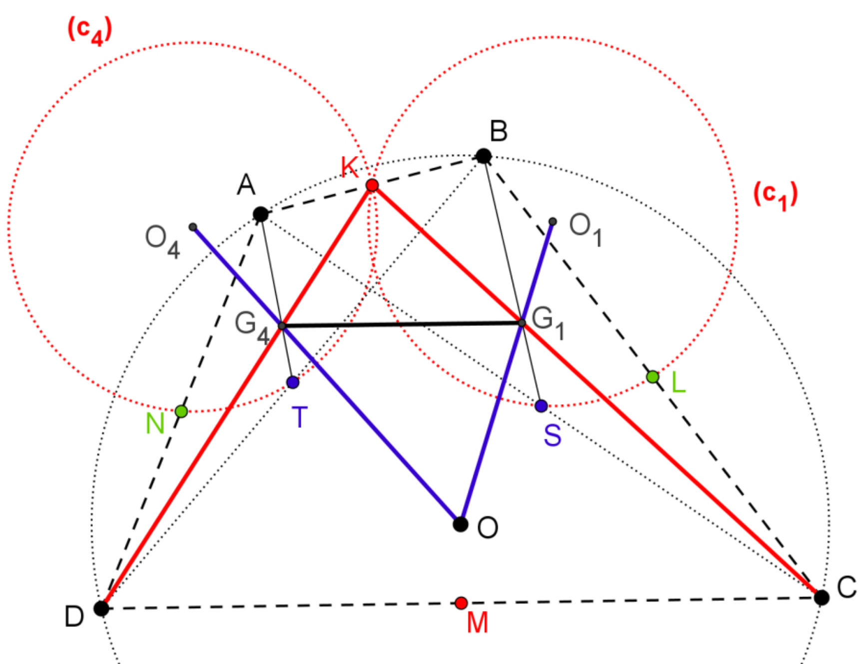
Οι κύκλοι όμως c_1 και c_1' είναι συμμετρικοί ως προς το σημείο G (επειδή οι τριάδες σημείων που τους ορίζουν είναι σημεία συμμετρικά ως προς το σημείο G).

Άρα ο κύκλος c_1 θα έχει ακτίνα $\dfrac{R}{2}$ και θα διέρχεται από το σημείο O' (που είναι το συμμετρικό του σημείου O με κέντρο συμμετρίας το σημείο G).

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι και οι κύκλοι c_2, c_3, c_4 θα έχουν ακτίνα $\frac{R}{2}$ και θα διέρχονται από το σημείο O'. Άρα τα κέντρα των κύκλων c_1, c_2, c_3, c_4 θα ανήκουν στο κύκλο με κέντρο το σημείο O' και ακτίνα $\frac{R}{2}$.

Τα κέντρα των κύκλων c_1', c_2', c_3' και c_4' (που είναι τα μέσα των OA, OB, OC και OD αντίστοιχα) ορίζουν τετράπλευρο με πλευρές παράλληλες προς τις πλευρές του $ABCD$.
Άρα και τα κέντρα των c_1, c_2, c_3, c_4 (που είναι τα συμμετρικά των c_1', c_2', c_3', c_4') θα ορίζουν τετράπλευρο όμοιο προς το αρχικό.

2[ος] Τρόπος
Για τον δεύτερο τρόπο απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε χαρακτηριστικές ιδιότητες του κύκλου και της ευθείας του Euler τριγώνου.
Τα μέσα των πλευρών, τα ίχνη των υψών και τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν το ορθόκεντρο με τις κορυφές του τριγώνου βρίσκονται επάνω στον ίδιο κύκλο που λέγεται κύκλος των εννέα σημείων ή κύκλος του Euler του τριγώνου.



Το κέντρο O' του κύκλου του Euler βρίσκεται επάνω στην ευθεία του Euler και μάλιστα είναι το μέσο του τμήματος OH (όπου O είναι το περίκεντρο και H το ορθόκεντρο του τριγώνου).
Η ακτίνα του κύκλου του Euler είναι το μισό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και ισχύει
Με βάση τις προηγούμενες προτάσεις συμπεραίνουμε ότι, οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων KLS, LMT, MNS και NKT (c_1, c_2, c_3, c_4 αντίστοιχα), είναι οι κύκλοι του Euler των τριγώνων ABC, BCD, CDA και ABD.
Τα τρίγωνα ABC, BCD, CDA και ABD είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο $c(O,R)$.

Άρα οι κύκλοι c_1, c_2, c_3, c_4 θα είναι ίσοι με ακτίνα $\frac{R}{2}$.

Θεωρούμε τώρα τα τρίγωνα ABC και ABD.

Στο τρίγωνο ABC θεωρούμε το βαρύκεντρο G_1 (που είναι το σημείο τομής των διαμέσων BS και CK) και το κέντρο O_1 του κύκλου c_1 (που είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KLS και αποτελεί το κύκλο του Euler του τριγώνου ABC).

Στο τρίγωνο ABD θεωρούμε το βαρύκεντρο G_4 (που είναι το σημείο τομής των διαμέσων AT και DK) και το κέντρο O_4 του κύκλου c_4 (που είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου KNT και αποτελεί το κύκλο του Euler του τριγώνου ABD).

Εφόσον τα σημεία G_1 και G_4 είναι βαρύκεντρα (από το τρίγωνο KCD) έχουμε:

$$\frac{G_1K}{G_1C} = \frac{G_4K}{G_4D} = \frac{1}{2} \text{ οπότε } G_1G_4 \parallel CD.$$

Εφόσον τα σημεία O_1 και O_4 είναι κέντρα κύκλου του Euler (από το τρίγωνο OO_1O_4) έχουμε:

$$\frac{OG_1}{OO_1} = \frac{OG_4}{OO_4} = 2 \text{ οπότε } G_1G_4 \parallel O_1O_4.$$

Από τις δύο τελευταίες παραλληλίες, προκύπτει $CD \parallel O_1O_4$.

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι οι πλευρές του τετραπλεύρου $O_1O_2O_3O_4$ είναι παράλληλες με τις πλευρές του τετραπλεύρου $ABCD$.