Να βρεθούν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(g(x)-g(y))=f(g(x))-y \qquad (1)$$
$$g(f(x)-f(y))=g(f(x))-y \qquad (2)$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{Q}$.

<u>Λύση</u>

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι $''1-1''$.

Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$ με $g(x_1)=g(x_2)$. Τότε θα ισχύει:

$$f(g(x_1))=f(g(x_2)) \qquad (3)$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $x=x_1$ και $y=x_2$ έχουμε:

$$f(g(x_1)-g(x_2))=f(g(x_1))-x_2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(0)=f(g(x_1))-x_2 \qquad (4).$$

Θέτοντας στη σχέση (1), όπου $x=x_2$ και $y=x_1$ έχουμε:

$$f(g(x_2)-g(x_1))=f(g(x_2))-x_1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(0)=f(g(x_2))-x_1 \qquad (5).$$

Από τις σχέσεις $(3),(4),(5)$ συμπεραίνουμε ότι $x_1=x_2$. Άρα η συνάρτηση g είναι $''1-1''$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι και η συνάρτηση f είναι $''1-1''$.

Θέτοντας στις σχέσεις (1) και (2) $x=y=0$, έχουμε:

$$\begin{cases} f(g(0)-g(0))=f(g(0))-0 \\ g(f(0)-f(0))=g(f(0))-0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=f(g(0)) \\ g(0)=g(f(0)) \end{cases}$$

και επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι $''1-1''$, καταλήγουμε στην ισότητα $f(0)=g(0)=0$.

Θέτοντας στις σχέσεις (1) και (2) όπου y το x και χρησιμοποιώντας την ισότητα $f(0)=g(0)=0$ έχουμε:

$$\begin{cases} f(g(x)-g(x))=f(g(x))-x \\ g(f(x)-f(x))=g(f(x))-x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(0)=f(g(x))-x \\ g(0)=g(f(x))-x \end{cases}\Rightarrow f(g(x))=g(f(x))=x.$$

Αντικαθιστώντας το τελευταίο αποτέλεσμα στις σχέσεις (1) και (2), έχουμε:

$$\begin{cases} f(g(x)-g(y))=x-y \qquad (A) \\ g(f(x)-f(y))=x-y \qquad (B) \end{cases}$$

Στη σχέση (A) θέτουμε $x=0,\ y=f(x)$ και στη σχέση (B) θέτουμε $x=0,\ y=g(x)$, οπότε έχουμε:

$$\begin{cases} f(g(0)-g(f(x)))=0-f(x) \\ g(f(0)-f(g(x)))=0-g(x) \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ g(-x)=-g(x) \end{cases}.$$

Θέτοντας τέλος στη σχέση (A) όπου x το $f(x)$ και όπου y το $-f(y)$ και στη σχέση (B) όπου x το $g(x)$ και όπου y το $-g(y)$ έχουμε:

$$\begin{cases} f(x+y)=f(x)+f(y) \\ g(x+y)=g(x)+g(y) \end{cases}.$$

Από τις τελευταίες ισότητες συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις f,g είναι της μορφής:

$f(x)=c_1x$ και $g(x)=c_2x$, όπου c_1,c_2 σταθεροί ρητοί αριθμοί (*).

Από τις δοσμένες σχέσεις (1) και (2) αποκλείουμε τη περίπτωση $c_1=0$ ή $c_2=0$ (διότι για $c_1=0$ ή $c_2=0$ καταλήγουμε $y=0$, που είναι άτοπο δεδομένου ότι οι σχέσεις (1) και (2) ισχύουν για κάθε $x,y\in\mathbb{Q}$).

Από τις σχέσεις $f(g(x))=g(f(x))=x$, έχουμε $(c_1\cdot c_2)x=x$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$.

Τελικά οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι $f(x)=cx$ και $g(x)=\frac{1}{c}x$ για κάθε $x\in\mathbb{Q}$.

Όπου c σταθερός μη μηδενικός ρητός αριθμός.

Με απλή αντικατάσταση τέλος των συναρτήσεων $f(x)=cx$ και $g(x)=\frac{1}{c}x$ στις σχέσεις (1) και (2) είναι προφανής η επαλήθευση των λύσεων.

(*) Οι συναρτήσεις Cauchy ………..