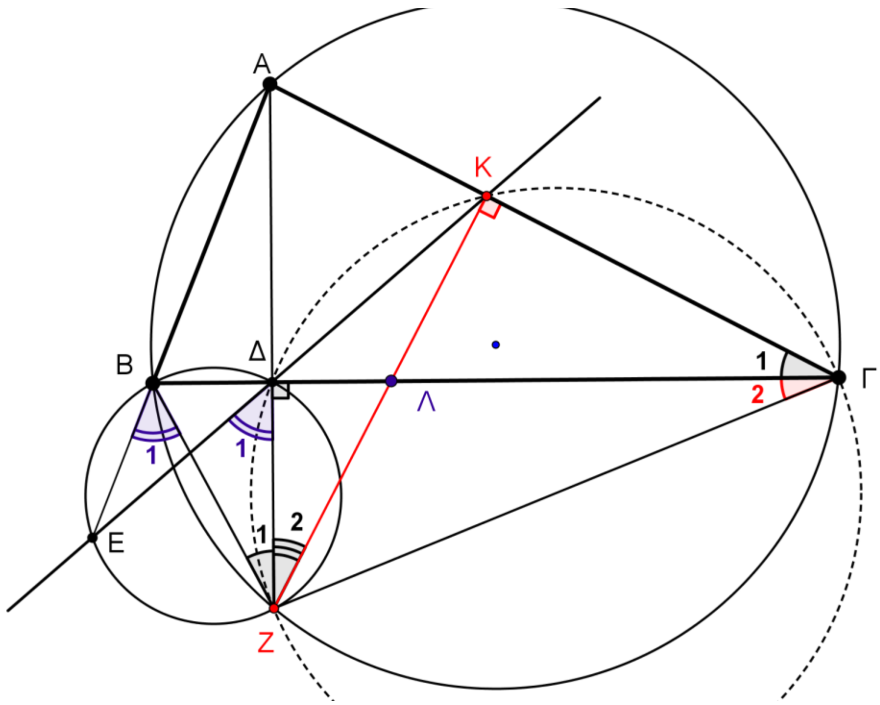
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Το ύψος του $A\Delta$ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Z και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Delta Z$ τέμνει την AB στο σημείο E. Αν η $E\Delta$ τέμνει την $A\Gamma$ στο K και η ZK την $B\Gamma$ στο σημείο Λ, αποδείξτε ότι το Δ είναι το μέσο της $B\Lambda$.

<u>Λύση</u>

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ έχουμε: $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $AB\Delta ZE$ έχουμε: $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1$.



Από τις δύο προηγούμενες ισότητες γωνιών προκύπτει $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Gamma}_2$, οπότε το τετράπλευρο $\Delta K\Gamma Z$ είναι εγγράψιμο. Άρα $\hat{\Gamma}_1 = \hat{Z}_2$.

Από το εγγεγραμμένο τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες έχουμε: $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$. Δηλαδή στο τρίγωνο $BZ\Lambda$, η $Z\Delta$ είναι ύψος και διχοτόμος.

Παρατήρηση

Θα μπορούσε εναλλακτικά να ζητηθεί να αποδειχτεί ότι το τρίγωνο $AB\Lambda$ είναι ισοσκελές.