ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ CEVA-AUBEL

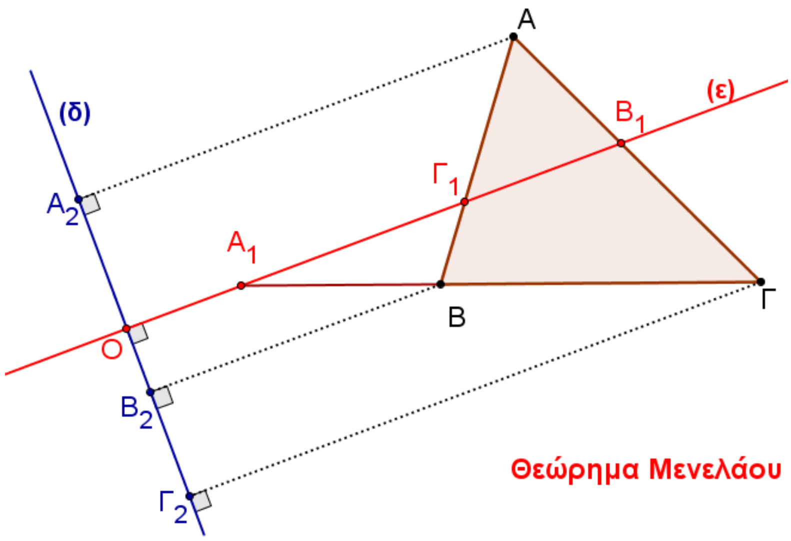
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

2011

1 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ - CEVA - AUBEL

1.1 Θεώρημα του Μενελάου

✦ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB, θεωρούμε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 αντίστοιχα. Αν τα σημεία A_1, B_1, Γ_1 είναι συνευθειακά τότε ισχύει: $\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$.**



<u>Αντίστροφα</u>: Αν ένα από τα σημεία A_1, B_1, Γ_1 (ή όλα) είναι εξωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου και ισχύει η σχέση $\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$, τότε τα σημεία A_1, B_1, Γ_1, είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

Στο τυχόν σημείο O της τέμνουσας (ε) θεωρούμαι ευθεία $(\delta)\perp(\varepsilon)$ και έστω A_2, B_2, Γ_2 οι προβολές των A_1, B_1, Γ_1, επάνω στην ευθεία (δ).

$$OA_1 \parallel BB_2 \parallel \Gamma\Gamma_2 \overset{\Theta.\Theta A\Lambda H}{\Rightarrow} \frac{A_1B}{A_1\Gamma}=\frac{OB_2}{O\Gamma_2} \quad (1)$$

$$OB_1 \parallel AA_2 \parallel \Gamma\Gamma_2 \overset{\Theta.\Theta A\Lambda H}{\Rightarrow} \frac{B_1\Gamma}{B_1A}=\frac{O\Gamma_2}{OA_2} \quad (2)$$

$$O\Gamma_1 \parallel BB_2 \parallel AA_2 \overset{\Theta.\Theta A\Lambda H}{\Rightarrow} \frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=\frac{OA_2}{OB_2} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις σχέσεις $(1),(2),(3)$ κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=\frac{OB_2}{O\Gamma_2}\frac{O\Gamma_2}{OA_2}\frac{OA_2}{OB_2}=1.$$

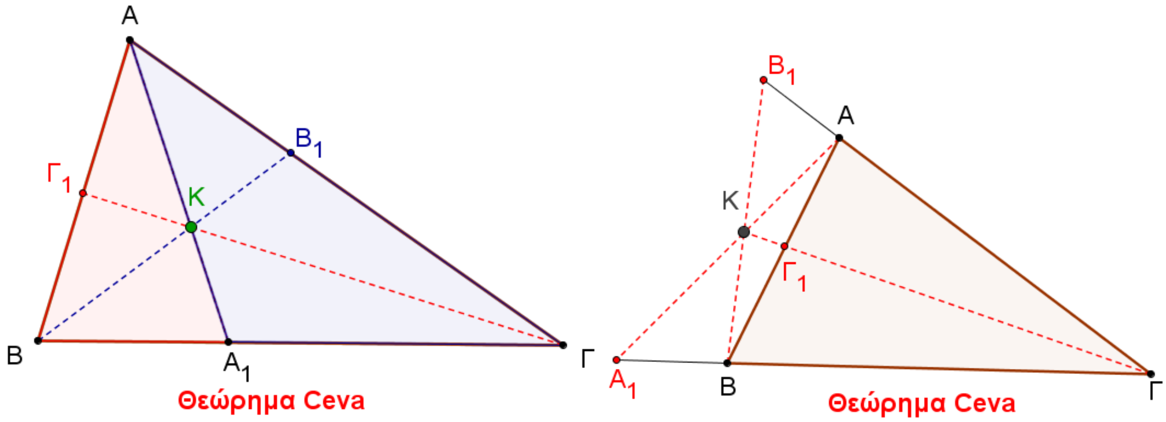
Το αντίστροφο του θεωρήματος του Μενελάου αποδεικνύεται με την εις άτοπο απαγωγή και η χρησιμότητά του περιγράφεται στη παρακάτω παρατήρηση.

ΣΥΝΕΥΘΕΙΑΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Για να αποδείξουμε ότι τα σημεία K, Λ, M (που ανήκουν στις πλευρές τριγώνου) είναι συνευθειακά, αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Μενελάου.

1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ CEVA

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB, θεωρούμε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο τότε: $\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$.**



<u>Αντίστροφα</u>: Αν ένα από τα σημεία A_1, B_1, Γ_1 (ή όλα) είναι εσωτερικά σημεία των πλευρών του τριγώνου και ισχύει η σχέση $\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1$, τότε οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ τέμνονται στο σημείο K.

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο ABA_1 το θεώρημα του Μενελάου με τέμνουσα την ΓK έχουμε:

$$\frac{BA_1}{B\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{KA}{KA_1}=1 \quad (1).$$

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο $A\Gamma A_1$ το θεώρημα του Μενελάου με τέμνουσα την BK έχουμε:

$$\frac{KA_1}{KA}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma A_1}=1 \quad (2).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(1),(2)$ κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=1.$$

Το αντίστροφο του θεωρήματος του Ceva αποδεικνύεται με την εις άτοπο απαγωγή και η χρησιμότητά του περιγράφεται στη παρακάτω παρατήρηση.

ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ

Για να αποδείξουμε ότι τρεις ευθείες περνάνε από το ίδιο σημείο, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι " Σεβιανές" (*) τριγώνου για τις οποίες ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Ceva.

(*) Ονομάζουμε **Σεβιανές** τριγώνου, τα ευθύγραμμα τμήματα που συνδέουν τις κορυφές του τριγώνου με σημεία των απέναντι πλευρών του.

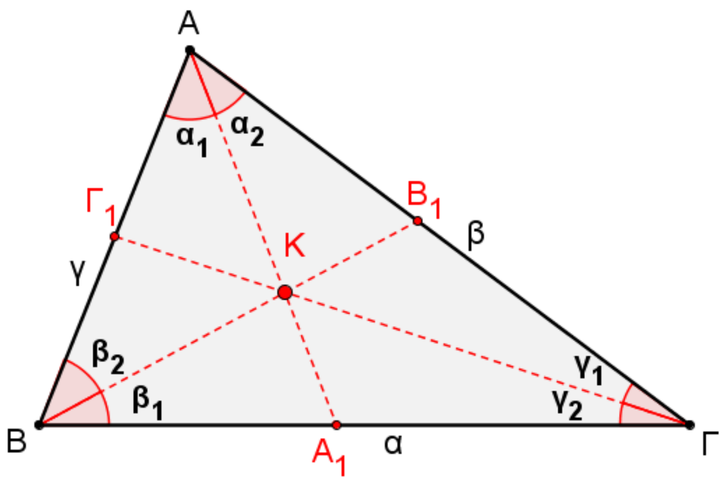
1.3 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΕΚΔΟΧΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ CEVA

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB, θεωρούμε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 αντίστοιχα. Οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο αν και μόνο αν: $\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2}\cdot\frac{\eta\mu\beta_1}{\eta\mu\beta_2}\cdot\frac{\eta\mu\gamma_1}{\eta\mu\gamma_2}=1$.**

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=2R \qquad (1).$$



Θεώρημα Ceva (Τριγωνομετρική εκδοχή)

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο ABA_1 το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{BA_1}{\eta\mu\alpha_1}=\frac{AA_1}{\eta\mu B}\Leftrightarrow BA_1=\frac{AA_1}{\eta\mu B}\eta\mu\alpha_1 \qquad (2).$$

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο $A\Gamma A_1$ το νόμο των ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\Gamma A_1}{\eta\mu\alpha_2}=\frac{AA_1}{\eta\mu\Gamma}\Leftrightarrow \Gamma A_1=\frac{AA_1}{\eta\mu\Gamma}\eta\mu\alpha_2 \qquad (3).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (2) και (3) κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}=\frac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu B}\cdot\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2}.$$

Η τελευταία σχέση γίνεται (με βάσει τη σχέση (1)):

$$\frac{A_1B}{A_1\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta}\cdot\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2}\qquad (i)$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε τις σχέσεις:

$$\frac{B_1\Gamma}{B_1A}=\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\eta\mu\beta_1}{\eta\mu\beta_2}\qquad (ii)$$

$$\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\eta\mu\gamma_1}{\eta\mu\gamma_2}\qquad (iii)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(i),(ii),(iii)$ κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\alpha_1}{\eta\mu\alpha_2}\cdot\frac{\eta\mu\beta_1}{\eta\mu\beta_2}\cdot\frac{\eta\mu\gamma_1}{\eta\mu\gamma_2}=1.$$

Παρατήρηση

α) Την τριγωνομετρική εκδοχή του θεωρήματος του Ceva θα την αναφέρουμε απλά, ως "**Τριγωνομετρικό Ceva**".

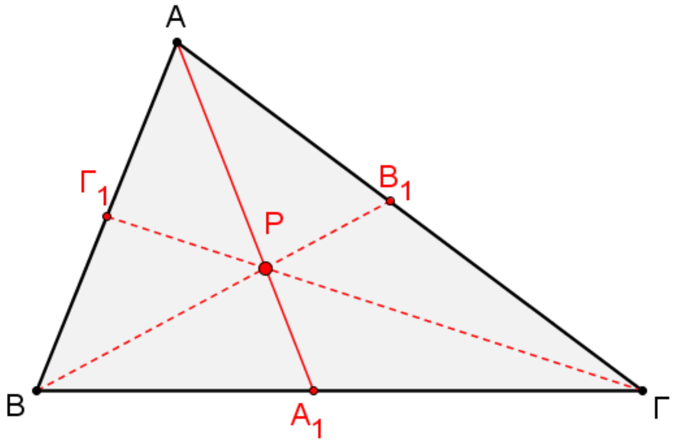
β) Προφανώς ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Ceva και για τη τριγωνομετρική μορφή του.

1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ AUBEL

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές του $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB, θεωρούμε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 αντίστοιχα. Αν οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο P τότε:** $\dfrac{PA}{PA_1}=\dfrac{B_1A}{B_1\Gamma}+\dfrac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}$.

Απόδειξη

Έστω ότι οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ τέμνονται στο σημείο P.



Θεώρημα Aubel

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο ABA_1 το θεώρημα του Μενελάου με τέμνουσα την ΓP έχουμε:

$$\frac{BA_1}{B\Gamma}\cdot\frac{B_1\Gamma}{B_1A}\cdot\frac{PA}{PA_1}=1\Leftrightarrow\frac{B_1A}{B_1\Gamma}=\frac{BA_1}{B\Gamma}\cdot\frac{PA}{PA_1}\qquad(1).$$

Εφαρμόζοντας στο τρίγωνο $A\Gamma A_1$ το θεώρημα του Μενελάου με τέμνουσα την BP έχουμε:

$$\frac{PA_1}{PA}\cdot\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}\cdot\frac{\Gamma B}{\Gamma A_1}=1\Leftrightarrow\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=\frac{PA}{PA_1}\cdot\frac{\Gamma A_1}{\Gamma B}\qquad(2).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{B_1A}{B_1\Gamma}+\frac{\Gamma_1A}{\Gamma_1B}=\frac{PA}{PA_1}\left(\frac{\Gamma A_1}{B\Gamma}+\frac{BA_1}{B\Gamma}\right)=\frac{PA}{PA_1}.$$

2 ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

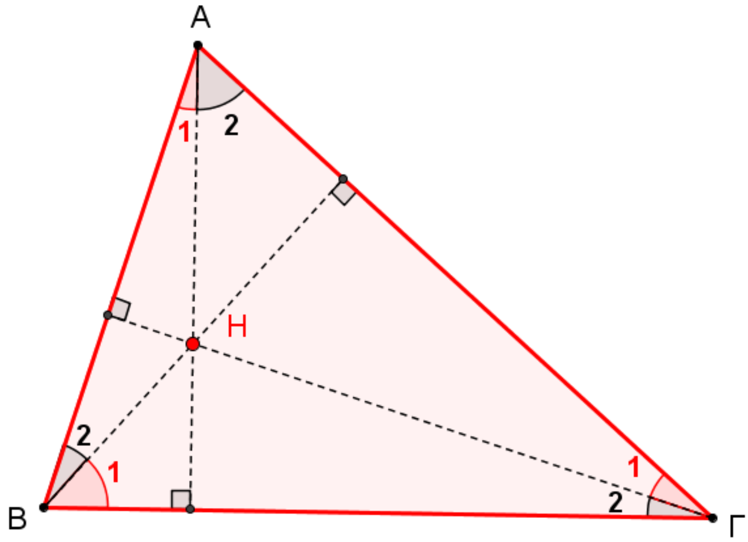
2.1 ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ CEVA

✷ **Αποδείξτε ότι τα ύψη τριγώνου περνάνε από το ίδιο σημείο.**

Απόδειξη

Από τα ορθογώνια τρίγωνα που δημιουργούνται έχουμε:

$$\eta\mu A_1 = \sigma\upsilon\nu B\,,\ \eta\mu A_2 = \sigma\upsilon\nu \Gamma \qquad (i)$$
$$\eta\mu B_1 = \sigma\upsilon\nu \Gamma\,,\ \eta\mu B_2 = \sigma\upsilon\nu A \qquad (ii)$$
$$\eta\mu \Gamma_1 = \sigma\upsilon\nu A\,,\ \eta\mu \Gamma_2 = \sigma\upsilon\nu B \qquad (iii).$$



Από τις σχέσεις $(i),(ii),(iii)$ έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2}\cdot\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2}\cdot\frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} = \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu A}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu B} = 1.$$

Άρα (σύμφωνα με τη τριγωνομετρική εκδοχή του θεωρήματος του Ceva) τα ύψη του τριγώνου συντρέχουν.

2.2 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ STEINER ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ CEVA

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Με βάση τις πλευρές του τριγώνου κατασκευάζουμε ισοσκελή τρίγωνα $A_1B\Gamma$, $B_1A\Gamma$ και Γ_1AB τα οποία βρίσκονται εξωτερικά του τριγώνου και είναι όμοια μεταξύ τους. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο.**

Απόδειξη

Εφόσον τα τρίγωνα $A_1B\Gamma$, $B_1A\Gamma$ και Γ_1AB είναι ισοσκελή και όμοια, οι παρά τη βάση γωνίες τους είναι ίσες.

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABA_1 έχουμε:

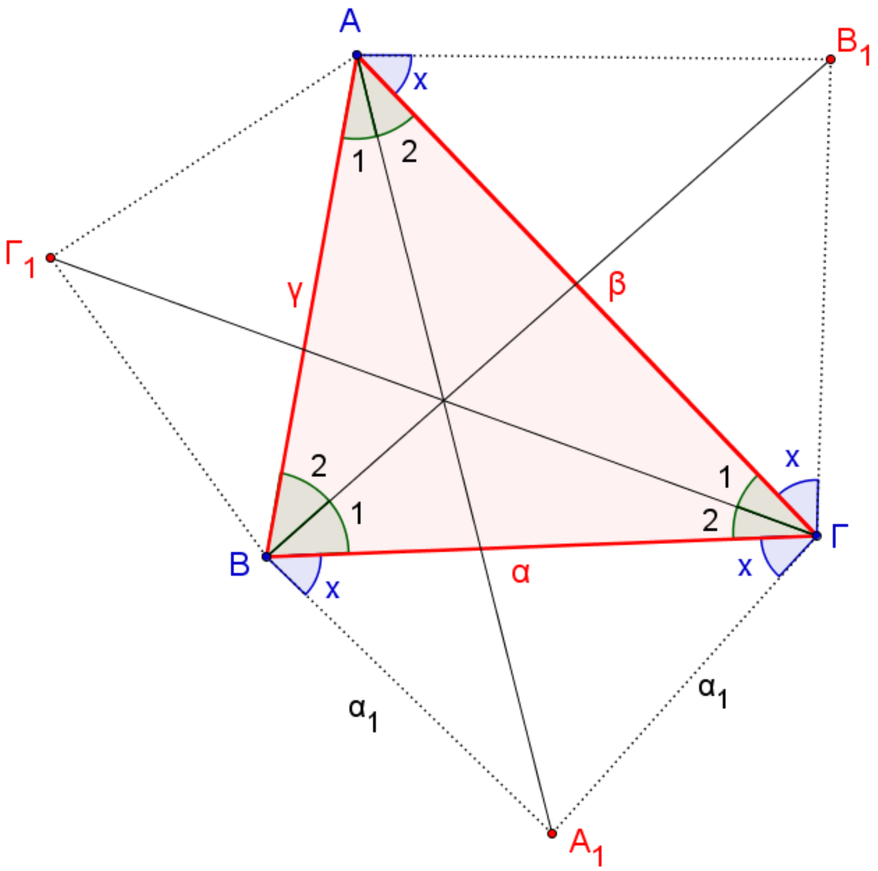
$$\frac{\alpha_1}{\eta\mu A_1} = \frac{AA_1}{\eta\mu(B+x)} \qquad (1).$$

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο $A\Gamma A_1$ έχουμε:

$$\frac{\alpha_1}{\eta\mu A_2} = \frac{AA_1}{\eta\mu(\Gamma + x)} \qquad (2).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} = \frac{\eta\mu(B + x)}{\eta\mu(\Gamma + x)} \qquad (\alpha)$$



Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} = \frac{\eta\mu(\Gamma + x)}{\eta\mu(A + x)} \qquad (\beta).$$

$$\frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} = \frac{\eta\mu(A + x)}{\eta\mu(B + x)} \qquad (\gamma).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(\alpha),(\beta)$ και (γ) καταλήγουμε:

$$\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu \Gamma_1}{\eta\mu \Gamma_2} = 1.$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Ceva οι ευθείες $AA_1, BB_1, \Gamma\Gamma_1$ περνάνε από το ίδιο σημείο.

2.3 ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ GERGONNE ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ CEVA

✷ Έστω I το κέντρο του εγγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου ABC και έστω A_o, B_o και C_o τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές BC, AC και AB αντίστοιχα. Στις προεκτάσεις των IA_o, IB_o και IC_o θεωρούμε τα σημεία L, M και K αντίστοιχα ώστε $IL = IM = IK$.

α) Αποδείξτε ότι οι ευθείες AL, BM και CK συντρέχουν.

β)

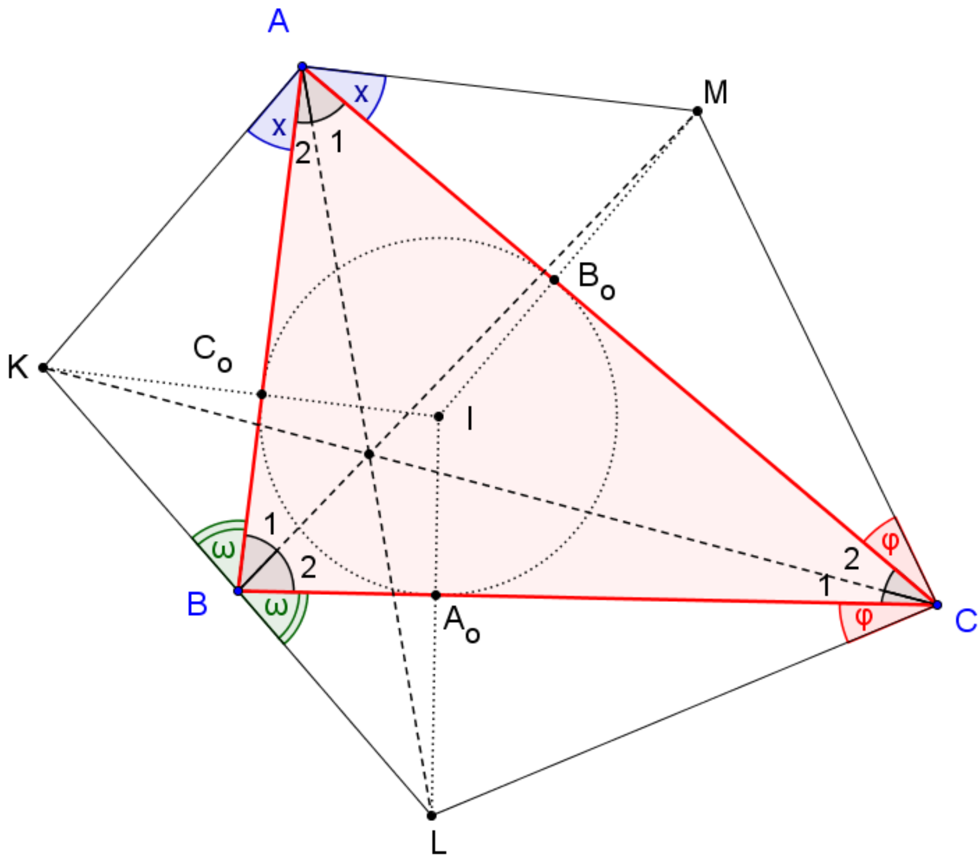
Απόδειξη

α) Από τη κατασκευή του σχήματος, ισχύουν οι παρακάτω (προφανείς) ισότητες τριγώνων, από τις οποίες προκύπτουν ισότητες γωνιών και ευθυγράμμων τμημάτων.

Τα τρίγωνα AKC_0 και AMB_0 είναι ίσα. Άρα $AM = AK$ και $K\hat{A}C_0 = M\hat{A}B_0 = \hat{x}$.

Τα τρίγωνα BKC_0 και BLA_0 είναι ίσα. Άρα $BK = BL$ και $K\hat{B}C_0 = L\hat{B}A_0 = \hat{\omega}$.

Τα τρίγωνα MCB_0 και CLA_0 είναι ίσα. Άρα $CL = CM$ και $M\hat{C}B_0 = L\hat{C}A_0 = \hat{\varphi}$.



Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABL έχουμε:

$$\frac{BL}{\eta\mu A_2} = \frac{AL}{\eta\mu(B+\omega)} \qquad (1).$$

Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ACL έχουμε:

$$\frac{CL}{\eta\mu A_1} = \frac{AL}{\eta\mu(C+\varphi)} \qquad (2).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} = \frac{\eta\mu(C+\varphi)}{\eta\mu(B+\omega)} \cdot \frac{CL}{BL} \qquad (\alpha)$$

Με όμοιο τρόπο έχουμε:

$$\frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} = \frac{\eta\mu(A+x)}{\eta\mu(C+\varphi)} \cdot \frac{MA}{MC} \qquad (\beta).$$

$$\frac{\eta\mu C_1}{\eta\mu C_2} = \frac{\eta\mu(B+\omega)}{\eta\mu(A+x)} \cdot \frac{KA}{KB} \qquad (\gamma).$$

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ και χρησιμοποιώντας τις ισότητες $AM = AK$, $BK = BL$ και $CL = CM$ καταλήγουμε:

$$\frac{\eta\mu A_1}{\eta\mu A_2} \cdot \frac{\eta\mu B_1}{\eta\mu B_2} \cdot \frac{\eta\mu C_1}{\eta\mu C_2} = 1.$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα του Ceva οι ευθείες AL, BM, CK περνάνε από το ίδιο σημείο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ