ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ

ΕΥΘΕΙΑ SIMSON

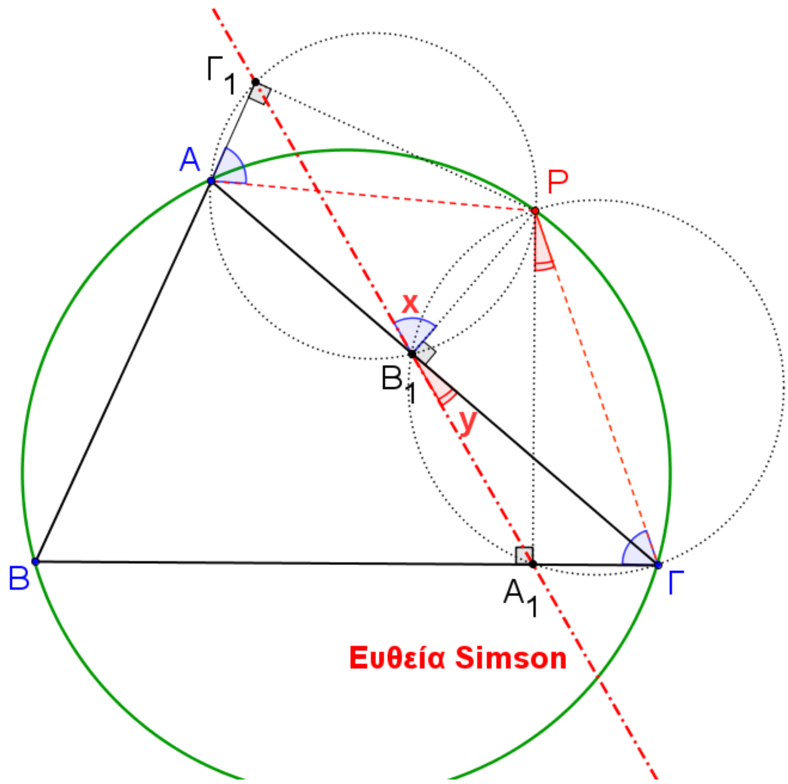
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

2009

1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

1.1 ΕΥΘΕΙΑ SIMSON

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχόν σημείο P του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν A_1, B_1 και Γ_1 είναι οι προβολές του P στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB του τριγώνου (αντίστοιχα), τότε τα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 είναι συνευθειακά.**



Απόδειξη

Το τετράπλευρο $AB_1P\Gamma_1$ είναι εγγράψιμο, οπότε: $P\hat{B}_1\Gamma_1 = P\hat{A}\Gamma_1 = \hat{x}$.

Το τετράπλευρο $AB\Gamma P$ είναι εγγεγραμμένο, οπότε: $P\hat{A}\Gamma_1 = P\hat{\Gamma}B = \hat{x}$.

Το τετράπλευρο $PB_1A_1\Gamma$ είναι εγγράψιμο, οπότε: $\Gamma\hat{B}_1A_1 = A_1\hat{P}\Gamma = \hat{y}$.

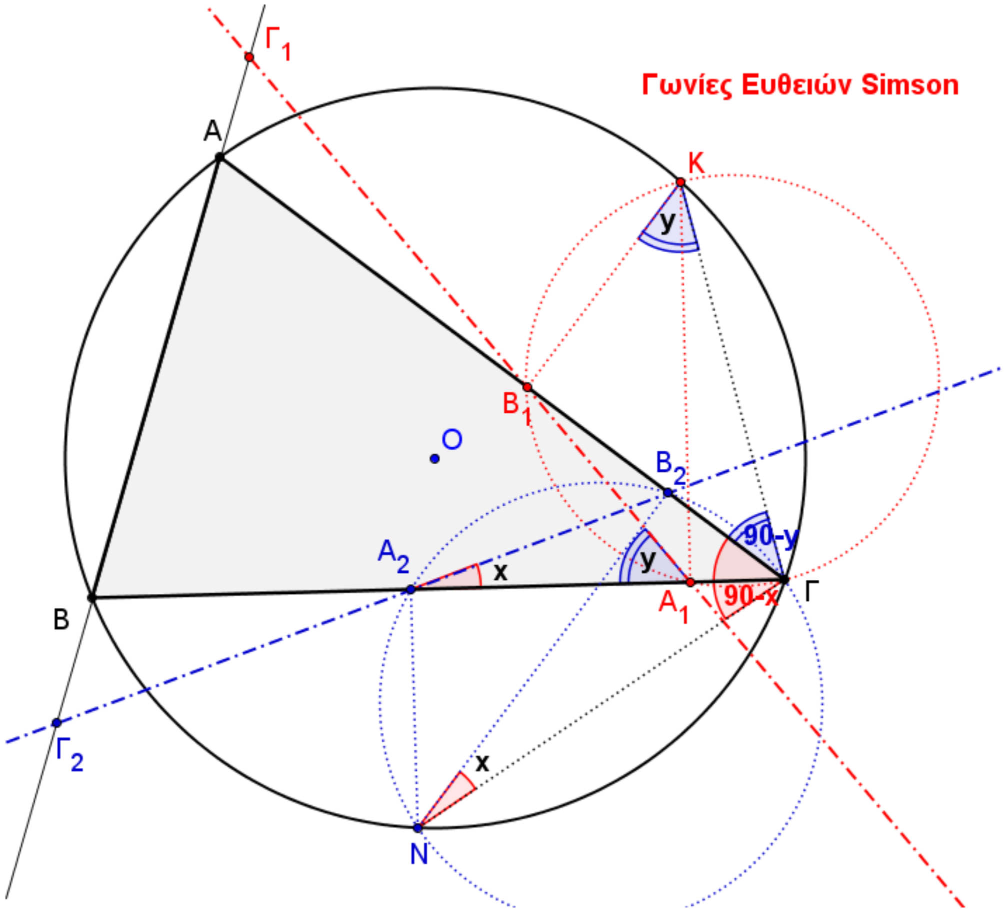
Από το ορθογώνιο τρίγωνο $PA_1\Gamma$, έχουμε: $\hat{x} + \hat{y} = 90^o$.

Άρα $A_1\hat{B}_1\Gamma_1 = 180^o$. Δηλαδή τα σημεία A_1, B_1, Γ_1 είναι συνευθειακά.

1.2 ΓΩΝΙΑ ΕΥΘΕΙΩΝ SIMSON

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και δύο διαφορετικά σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του. Οι ευθείες Simpson που αντιστοιχούν στα δύο σημεία σχηματίζουν γωνία που ισούται με το μισό του τόξου που δημιουργούν τα δύο διαφορετικά σημεία.**

Απόδειξη: Έστω K, N δύο σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$ και $(\varepsilon),(\delta)$ οι αντίστοιχες ευθείες Simpson. Οι γωνίες που σχηματίζουν οι δύο ευθείες Simpson είναι $\hat{x}+\hat{y}$ ή $180^o-(\hat{x}+\hat{y})$ (βλέπε στο σχήμα). Θα αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο με άκρα τα σημεία K,N είναι $\hat{x}+\hat{y}$ ή $180^o-(\hat{x}+\hat{y})$.



Το τετράπλευρο $KB_1A_1\Gamma$ είναι εγγράψιμο, οπότε $B_1\hat{K}\Gamma=\hat{y}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $KB_1\Gamma$ έχουμε: $K\hat{\Gamma}B_1=90^o-\hat{y}\quad(1)$.

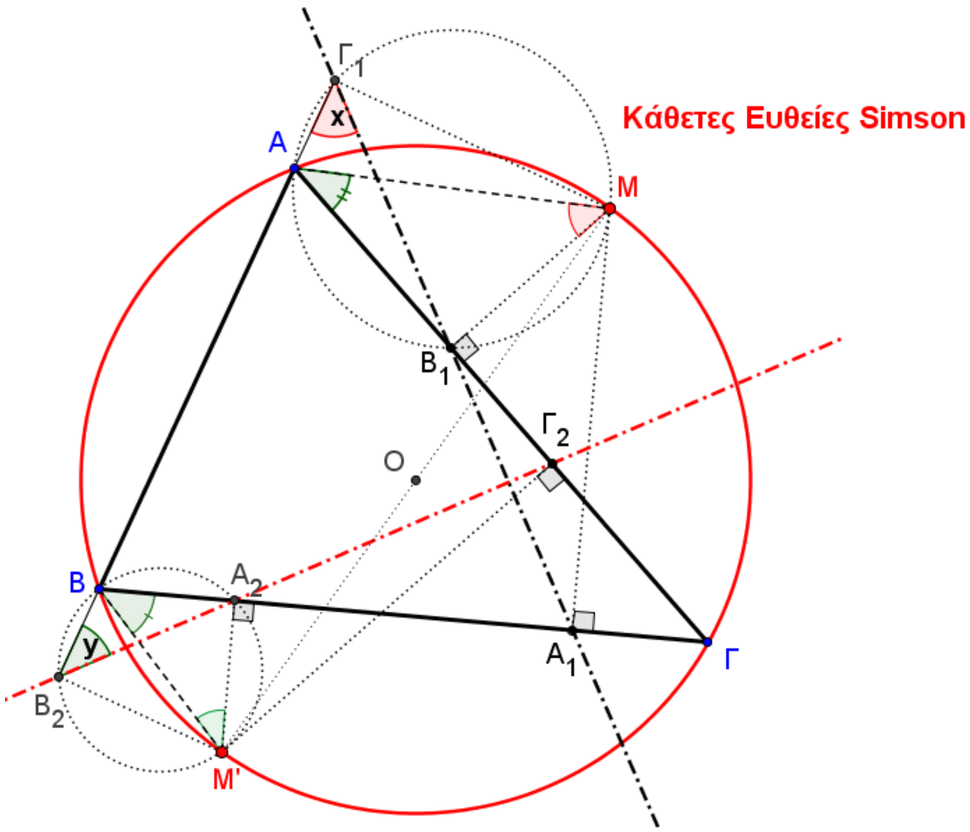
Το τετράπλευρο $NA_2B_2\Gamma$ είναι εγγράψιμο, οπότε $B_2\hat{N}\Gamma=\hat{x}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $NB_2\Gamma$ έχουμε: $N\hat{\Gamma}B_2=90^o-\hat{x}\quad(2)$.

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $N\hat{\Gamma}K=180^o-(\hat{x}+\hat{y})$.

1.3 ΚΑΘΕΤΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ SIMSON

✦ **Οι ευθείες Simpson που αντιστοιχούν σε αντιδιαμετρικά σημεία του περι-γεγραμμένου κύκλου τριγώνου $AB\Gamma$ είναι κάθετες μεταξύ τους.**

Απόδειξη 1η: Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του προηγούμενου προβλήματος.



Απόδειξη 2: Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{x}+\hat{y}=90^o$.

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $BB_2M'A_2$ έχουμε: $\hat{y}=B\hat{M}'A_2=90^o-M'\hat{B}A_2$

Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $AB_1M\Gamma_1$ έχουμε: $\hat{x}=A\hat{M}B_1=90^o-M\hat{A}B_1$

Επειδή όμως $M'\hat{B}\Gamma+M\hat{A}\Gamma=90^o$, έχουμε τελικά $\hat{x}+\hat{y}=90^o$.

1.4 Παραλληλιες Ευθειων Simson

✷ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, το ορθόκεντρό του H και τυχόν σημείο M του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν η προέκταση της καθέτου από το M προς τη $B\Gamma$ τέμνει το περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο N, τότε η AN είναι παράλληλη προς την ευθεία Simson (ε) που αντιστοιχεί στο σημείο M και η ευθεία Simson διχοτομεί το τμήμα HM.**

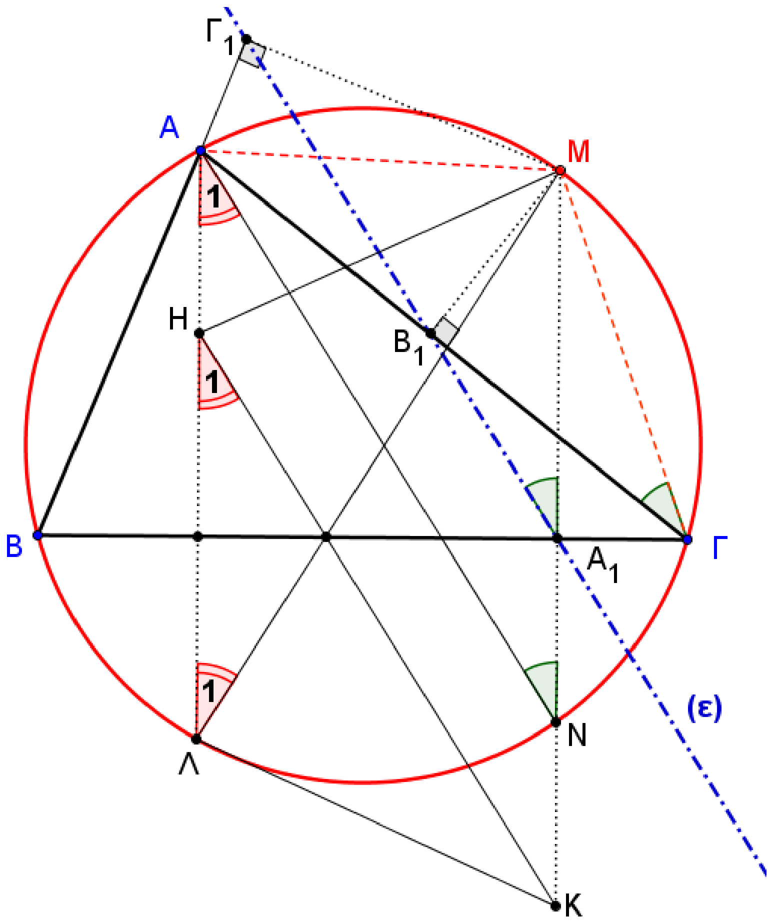
Απόδειξη: Από το εγγράψιμο τετράπλευρο $M\Gamma A_1B_1$ έχουμε:

$$B_1\hat{A}_1M=M\hat{\Gamma}B_1 \qquad (1).$$

Από τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο τόξο AM έχουμε:

$$M\hat{\Gamma}A=M\hat{N}A \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε $M\hat{A}_1B_1=M\hat{N}A$, οπότε $AN\,//(\varepsilon)$.

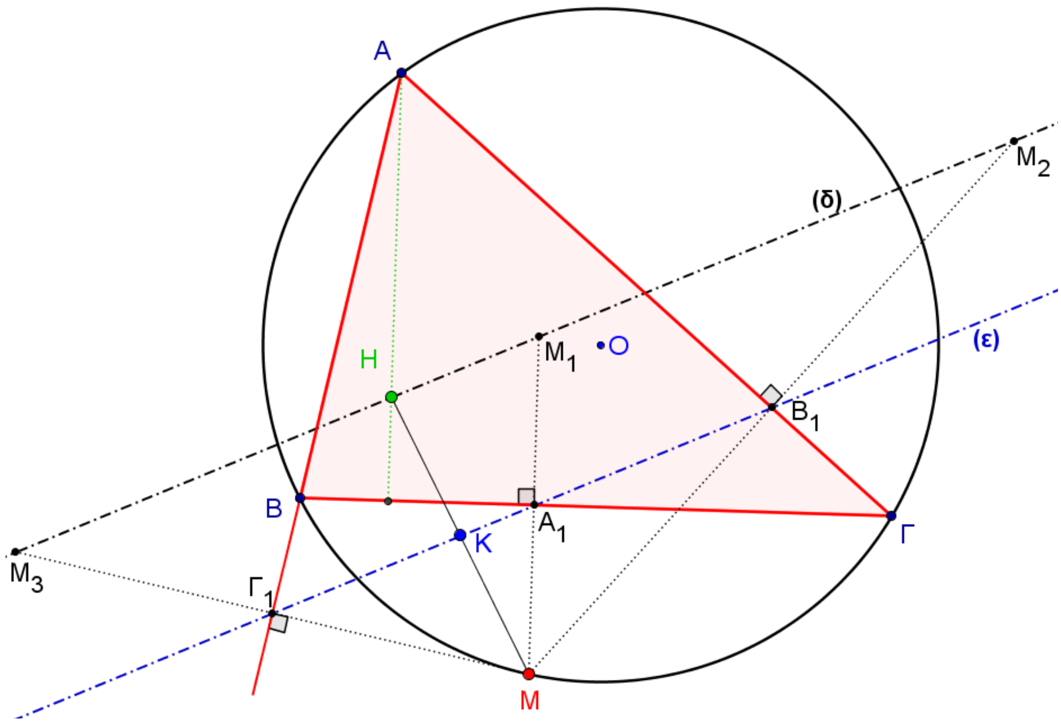


Έστω K το συμμετρικό του M και Λ το συμμετρικό του H ως προς τη $B\Gamma$.
Τότε το τετράπλευρο $K\Lambda HM$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και η $B\Gamma$ είναι μεσοκάθετος των παράλληλων πλευρών του $H\Lambda$ και MK.
Από το ισοσκελές τραπέζιο $K\Lambda HM$ έχουμε: $\hat{\Lambda}_1 = \hat{H}_1$.
Εφόσον $A\Lambda // MN$, τα τόξα ΛN και AM θα είναι ίσα, οπότε οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν σε αυτά είναι ίσες. Δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{\Lambda}_1$.

1.5 Ομοιοθετη Ευθειας Simson

✦ **Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τυχόν σημείο M του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα συμμετρικά του σημείου M προς τις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα, τότε τα M_1, M_2, M_3 ανήκουν σε ευθεία (δ) η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο (για τις διάφορες θέσεις που μπορεί να πάρει το σημείο M επάνω στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου).**

Απόδειξη: Έστω A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των MM_1, MM_2, MM_3. Τότε τα A_1, B_1 και Γ_1 είναι οι προβολές του σημείου M στις πλευρές $B\Gamma, A\Gamma$ και AB του τριγώνου $AB\Gamma$ αντίστοιχα. Άρα τα A_1, B_1, Γ_1 θα ανήκουν στην ευθεία Simson (ε) που αντιστοιχεί στο σημείο M.
Τα σημεία M_1, M_2, M_3 θα ανήκουν στην ευθεία (δ), που είναι η ομοιόθετη της ευθείας (ε) στην ομοιοθεσία με κέντρο το σημείο M και λόγο 2.



Γνωρίζουμε όμως (από τη προηγούμενη πρόταση) ότι η ευθεία Simson (ε), διχοτομεί το τμήμα HM (H το ορθόκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$). Άρα οι ευθείες (δ) (που προκύπτουν από τις διάφορες θέσεις του σημείου M στο περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$), θα περνάνε από το H.

1.6 ΑΣΚΗΣΗ (ΕΥΘΕΙΕΣ SIMSON)

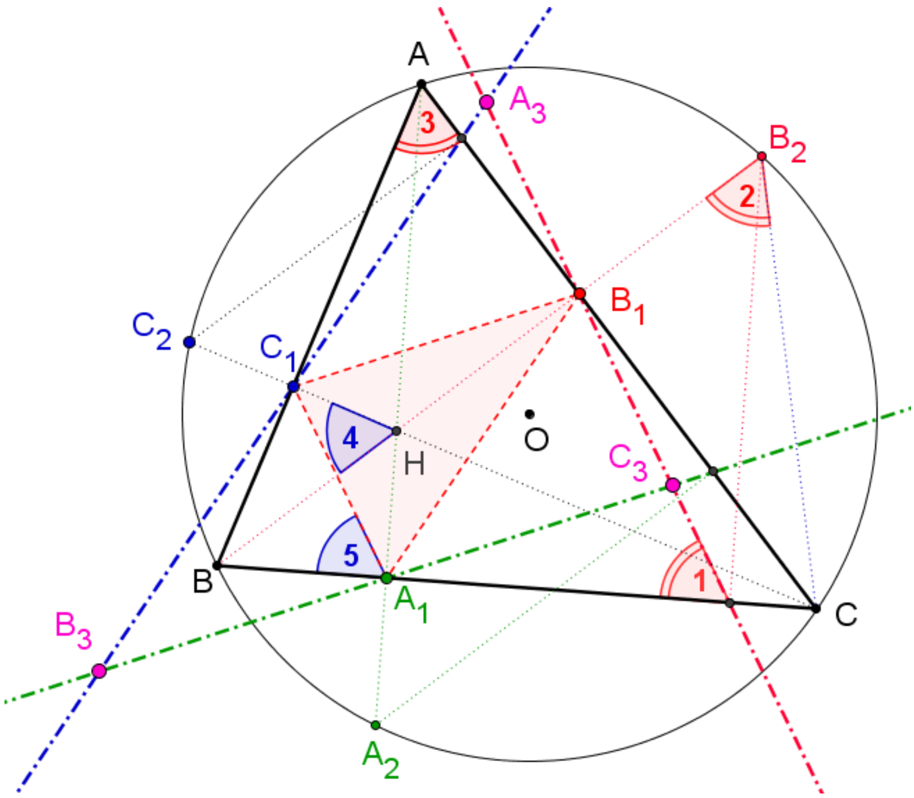
✦ **Οι προεκτάσεις των υψών AA_1, BB_1 και CC_1 τέμνουν τον περιγεγραμμένο κύκλο του, στα σημεία A_2, B_2 και C_2 αντίστοιχα. Οι ευθείες Simson που αντιστοιχούν στα σημεία A_2, B_2 και C_2, δημιουργούν τρίγωνο $A_3B_3C_3$ (βλέπε σχήμα). Αποδείξτε ότι τα βαρύκεντρα των τριγώνων $A_1B_1C_1$ και $A_3B_3C_3$ ταυτίζονται και οι ευθείες A_2A_3, B_2B_3 και C_2C_3 συντρέχουν.**

<u>Λύση</u>

Επειδή τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τις πλευρές τριγώνου βρίσκονται στο περιγεγραμμένο κύκλο του, έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &A_1 \text{ μέσο } HA_2 \\ &C_1 \text{ μέσο } HC_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_1C_1 \parallel A_2C_2 \text{ και με όμοιο τρόπο έχουμε } B_1C_1 \parallel B_2C_2 \text{ και } A_1B_1 \parallel A_2B_2$$

(δηλαδή τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_2B_2C_2$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες).



Από την ισότητα των γωνιών (που σημειώνονται στο σχήμα με του αριθμούς *1,2,3,4* και *5*) προκύπτει ότι: $A_1C_1 // A_3C_3$ και με ανάλογο τρόπο καταλήγουμε:

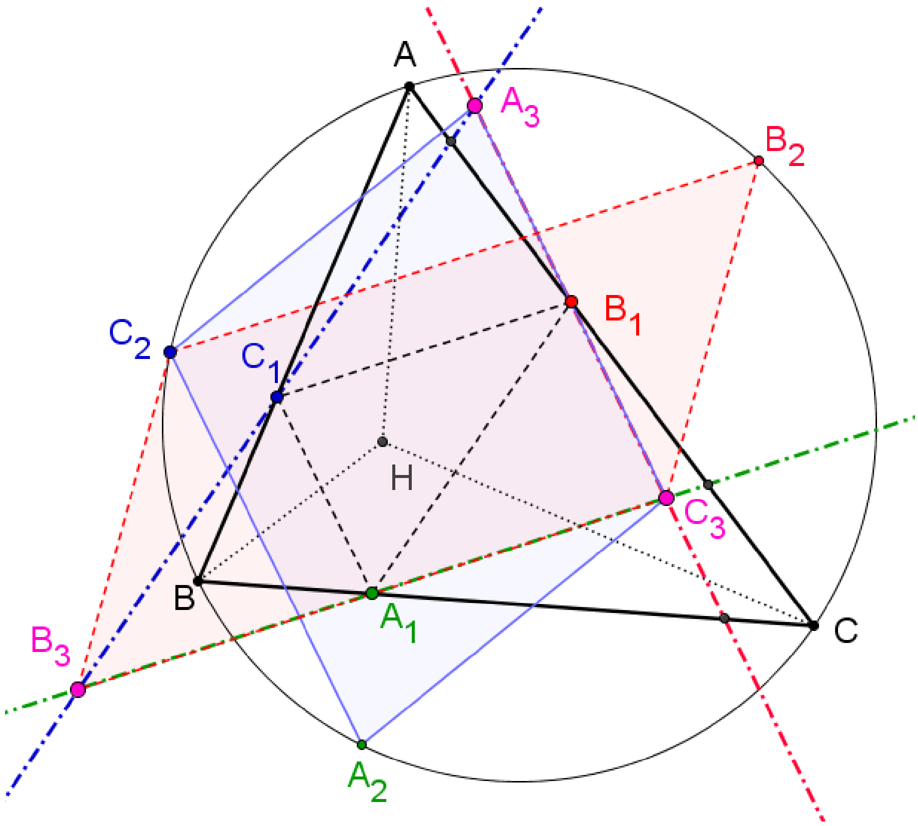
$$B_1C_1 // B_3C_3 \text{ και } A_1B_1 // A_3B_3.$$

Άρα τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ και $A_3B_3C_3$ έχουν τις πλευρές τους παράλληλες.

Τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_2B_2C_2$ είναι ομοιόθετα στην ομοιοθεσία με κέντρο το ορθόκεντρο H του τριγώνου ABC.

Από τα παραλληλόγραμμα (που δημιουργούνται από τις παραλληλίες των πλευρών των τριγώνων $A_1B_1C_1$ και $A_3B_3C_3$) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία A_1, B_1, C_1 είναι μέσα των πλευρών του τριγώνου $A_3B_3C_3$.

Άρα τα τρίγωνα $A_1B_1C_1$ και $A_3B_3C_3$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.



Τα τετράπλευρα $A_2C_2A_3C_3$ και $B_2C_2B_3C_3$ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε οι διαγώνιές τους A_2A_3, B_2B_3 και C_2C_3 διχοτομούνται και κατά συνέπεια συντρέχουν στο μέσο του C_2C_3.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ