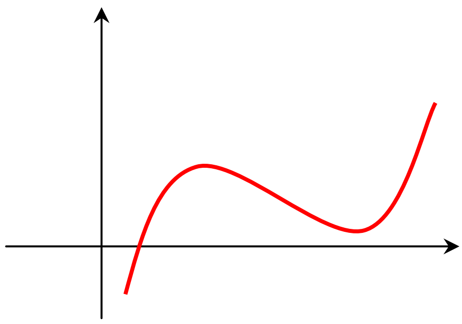
ΒΑΓΓΕΛΗΣ ΨΥΧΑΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



www.mathlab.gr

1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

⁂ Ονομάζουμε **διατεταγμένο ζεύγος** με πρώτο στοιχείο το α και δεύτερο το β (συμβολικά: (α,β)), το δισύνολο: $\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$.

Δηλαδή: $(\alpha,\beta)=\{\{\alpha\},\{\alpha,\beta\}\}$

∗ Από τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους προκύπτουν οι βασικές ιδιότητες:

$$(\alpha,\beta)=(\gamma,\delta) \leftrightarrow (\alpha=\gamma \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \beta=\delta)$$

$$(\alpha,\beta)\neq(\beta,\alpha)$$

⁂ Ονομάζουμε **καρτεσιανό γινόμενο** του μη κενού συνόλου A επι το μη κενό σύνολο B (συμβολικά: $A\times B$), το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (α,β), όπου: $\alpha\in A$ και $\beta\in B$.

Δηλαδή: $A\times B=\{(\alpha,\beta):\alpha\in A,\beta\in B\}$

∗ Βασικές ιδιότητες του καρτεσιανού γινομένου είναι:

$$A\times B=\varnothing \leftrightarrow (A=\varnothing \text{ ή } B=\varnothing)$$

$$A\times B=B\times A \leftrightarrow A=B$$

$$A\times B\neq B\times A$$

∗ Αν $A=B$ τότε το καρτεσιανό γινόμενο $A\times A$ το συμβολίζουμε με A^2.

⁂ Ονομάζουμε **σχέση** από το μη κενό σύνολο A στο μη κενό σύνολο B, κάθε υποσύνολο σ του $A\times B$.

∗ Αν το διατεταγμένο ζεύγος (α,β) ανήκει στη σχέση σ, τότε λέμε ότι το α **σχετίζεται** με το β ή ότι το α **αντιστοιχίζεται** στο β ή ότι η εικόνα του α (μέσω της σχέσης σ) είναι το β.

∗ Αν το διατεταγμένο ζεύγος (α,β) ανήκει στη σχέση σ, τότε γράφουμε συμβολικά: $\alpha\sigma\beta$ ή $\sigma(\alpha)=\beta$.

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $A=\{1,2,3\}$ και $B=\{1,4\}$ τότε:

$$A\times B=\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}.$$

Το σύνολο $\sigma=\{(1,4),(2,4),(3,1),(3,4)\}\subset A\times B$, είναι (ορίζει) μία σχέση από το σύνολο A στο σύνολο B.
Επειδή $(1,4)\in\sigma$ μπορούμε να γράψουμε $\sigma(1)=4$ ή $1\sigma 4$.

* Αν $A=B$ και $\sigma\subseteq A\times B=A\times A$, τότε λέμε ότι έχουμε μία σχέση **επί του** A.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **ανακλαστική** όταν ισχύει:
  $\alpha\sigma\alpha$ για κάθε $\alpha\in A$.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **συμμετρική** όταν ισχύει:
  $\alpha\sigma\beta\leftrightarrow\beta\sigma\alpha$ για $\alpha,\beta\in A$.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **αντισυμμετρική** όταν ισχύει:
  ($\alpha\sigma\beta$ και $\beta\sigma\alpha$) τότε $\alpha=\beta$ για $\alpha,\beta\in A$.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **μεταβατική** όταν ισχύει:
  $\left.\begin{matrix}\alpha\sigma\beta\\ \beta\sigma\gamma\end{matrix}\right\}$ τότε $\alpha\sigma\gamma$ για $\alpha,\beta,\gamma\in A$.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **σχέση ισοδυναμίας** όταν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
* Μία σχέση $\sigma\subseteq A\times A$ επί του A, θα λέγεται **σχέση διατάξεως** όταν είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική.

⁂ Ονομάζουμε **απεικόνιση** από το μη κενό σύνολο A στο μη κενό σύνολο B, κάθε σχέση σ από το A στο B, με την οποία σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχούμε ένα και μόνο στοιχείο του B.

* Τις απεικονίσεις τις συμβολίζουμε συνήθως με: $\sigma: A\to B$.
* Το A λέγεται **σύνολο αφετηρίας** και το B **σύνολο αφίξεως**.
* Γιά να αποδείξουμε ότι μία σχέση $\sigma\subseteq A\times B$ είναι απεικόνιση, αρκεί να αποδείξουμε ότι:
  (i) για κάθε $x\in A$ υπάρχει $y\in B$ ώστε: $\sigma(x)=y$
  (ii) αν $x_1=x_2\in A$ τότε $\sigma(x_1)=\sigma(x_2)$.
* Απεικονίσεις μπορεί να έχουμε και μεταξύ μη αριθμοσυνόλων.
* Για παράδειγμα, η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι μία απεικόνιση $+:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την οποία σε κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών, αντιστοιχούμε ένα άλλο πραγματικό αριθμό (το άθροισμά τους). Π.χ $(3,5)\to 8$.
  (σε διατεταγμένα ζεύγη αντιστοιχούμε αριθμούς)

- Τις απεικονίσεις μεταξύ αριθμοσυνόλων τις ονομάζουμε **συναρτήσεις**.
- Αν τα A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$, τότε έχουμε πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.
- Στη περίπτωση αυτή το $A \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται **πεδίο ορισμού**.
- Για διδακτικούς και πρακτικούς λόγους δίνεται συνήθως ο παρακάτω ορισμός για την πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση μιάς πραγματικής μεταβλητής** ή απλά **συνάρτηση** με πεδίο ορισμού το $A \subseteq \mathbb{R}$, τη διαδικασία (κανόνα) με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχούμε ένα και μόνο στοιχείο $y \in \mathbb{R}$.

- Τις συναρτήσεις τις συμβολίζουμε συνήθως με $f : A \to \mathbb{R}$
- Το $x \in A$ το ονομάζουμε **ανεξάρτητη** μεταβλητή και το $y \in \mathbb{R}$ **εξαρτημένη** μεταβλητή.
- Το $y = f(x) \in \mathbb{R}$ το ονομάζουμε **τιμή** της f στο $x \in A$ ή **εικόνα** του x.

2. ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ - ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Πεδίο ορισμού μιάς συνάρτησης f ονομάζουμε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο "έχει νόημα" πραγματικού αριθμού το $f(x)$.

- Το πεδίο ορισμού μιάς συνάρτησης f το συμβολίζουμε συνήθως με D_f.
- Δηλαδή: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Σύνολο τιμών μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζουμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}$, που αποτελείται από τις εικόνες των στοιχείων του πεδίου ορισμού A.

- Το σύνολο τιμών μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ το συμβολίζουμε συνήθως με $f(A)$.
- Δηλαδή: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y\}$.
- Το $f(A)$ αποτελείται από εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, που είναι εικόνα ενός τουλά-

χιστον $x \in A$.

- Πρακτικώτερα το $f(A)$ αποτελείται από εκείνα τα $y \in \mathbb{R}$, για τα οποία η εξίσωση $y = f(x)$, έχει μία τουλάχιστον λύση (ως προς x) στο A.
- Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:
  1. Προσπαθούμε να λύσουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x και θέτουμε τους κατάλληλους περιορισμούς ώστε η εξίσωση να έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση.
  2. Απαιτούμε μία τουλάχιστον από τις λύσεις που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
  3. Οι περιορισμοί που προκύπτουν (για το y), από τα δύο προηγούμενα βήματα, μας οδηγούν στο προσδιορισμό του συνόλου τιμών.

* Έστω η συνάρτηση $f : X \to Y$ και $A \subseteq X$.
Το σύνολο $f(A) = \{y \in Y : \text{υπάρχει } x \in A \text{ με } f(x) = y\}$ λέγεται **εικόνα** του A ως προς την f.

* Έστω η συνάρτηση $f : X \to Y$ και $B \subseteq Y$.
Το σύνολο $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ λέγεται **αντίστροφη εικόνα** του B ως προς την f

3. ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

* **Γραφική παράσταση** μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ονομάζουμε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου, για τα οποία ισχύει: $x \in A$ και $y = f(x)$.

- Τη γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ τη συμβολίζουμε με C_f.
  Δηλαδή $C_f = \{M(x, y) : x \in A, f(x) = y\}$.
- Ισχύει η ισοδυναμία: $M(x, y) \in C_f \leftrightarrow f(x) = y$
- Η γραφική παράσταση μιάς συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ κόβεται από τον άξονα $y'y$ ή από ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$, σε ένα το πολύ σημείο.

  <u>Παράδειγμα</u>
  Ο κύκλος με κέντρο το σημείο $K(1,2)$ και ακτίνα $r = 5$ δεν είναι γραφική παράστση κάποιας συνάρτησης. Απλά οι συντεταγμένες οποιουδήποτε

σημείου του $M(x, y)$, ικανοποιούν την εξίσωση:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25.$$

4. ΑΡΤΙΑ-ΠΕΡΙΤΤΗ-ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

✷ Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **άρτια** όταν:

(i) $-x \in A$ για κάθε $x \in A$ και

(ii) $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ είναι άρτια διότι:

(ι) $-x \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

(ιι) $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✷ Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **περιττή** όταν:

(i) $-x \in A$ για κάθε $x \in A$ και

(ii) $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in A$.

<u>Παράδειγμα</u>

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^5 + 4x^3 - x$ είναι περιττή διότι:

(ι) $-x \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

(ιι) $f(-x) = (-x)^5 + 4(-x)^3 - (-x) = -x^5 - 4x^3 + x =$

$= -(x^5 + 4x^3 - x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

✷ Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ θα λέγεται **περιοδική** όταν υπάρχει $T \in \mathbb{R}^*$ ώστε:

(i) $x + T \in A$ για κάθε $x \in A$ και

(ii) $f(x+T) = f(x)$ για κάθε $x \in A$

<u>Παράδειγμα</u>

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ με $f(x) = \eta\mu x$ είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ διότι:

(ι) $x + 2\pi \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και (ιι) $f(x+T)=f(x+2\pi)=\eta\mu(x+2\pi)=\eta\mu x=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ με $f(x)=\eta\mu(\alpha x)$, $\alpha\in\mathbb{R}^*$ είναι περιοδική με περίοδο $T=\dfrac{2\pi}{\alpha}$ διότι:

(ι) $x+\dfrac{2\pi}{\alpha}\in\mathbb{R}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

(ιι) $f(x+T)=f\left(x+\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)=\eta\mu\alpha\left(x+\dfrac{2\pi}{\alpha}\right)=\eta\mu(\alpha x+2\pi)=$

$=\eta\mu(\alpha x)=f(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

- Η γραφική παράσταση μιάς άρτιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.
- Η γραφική παράσταση μιάς περιττής συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι συμμετρική ως προς τον αρχή των αξόνων.
- Η γραφική παράσταση μιάς περιοδικής συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ επαναλαμβάνεται στο διαστήματα πλάτους μιας περιόδου.
- Μία περιοδική συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ αρκεί να μελετηθεί σε ένα διάστημα πλάτους μιας περιόδου.(στα υπόλοιπα διαστήματα επαναλαμβάνεται)
- Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ μπορεί να μην είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

  Παράδειγμα

  Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^4-x^3+1$ δεν είναι άρτια ούτε περιττή.
- Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ εκφράζεται πάντα σαν άθροισμα μιάς άρτιας και μιάς περιττής συνάρτησης, κατά μοναδικό τρόπο.

  Παρατήρηση

  Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ εκφράζεται πάντα σαν άθροισμα της άρτιας συνάρτησης $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ και της περιττής συνάρτησης $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

* Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T\in\mathbb{R}^*$, τότε έχει περίοδο και το $kT\in\mathbb{R}^*$ με $k\in\mathbb{Z}^*$.

5. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ ισχύει : $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.
(ή όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1>x_2}$ ισχύει : $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$)

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **αύξουσα** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1)\le f(x_2)}$.
(ή όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1>x_2}$ ισχύει : $\mathbf{f(x_1)\ge f(x_2)}$)

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$.
(ή όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1>x_2}$ ισχύει : $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$)

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **φθίνουσα** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1)\ge f(x_2)}$.
(ή όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1>x_2}$ ισχύει : $\mathbf{f(x_1)\le f(x_2)}$)

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **σταθερή** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: για κάθε $\mathbf{x_1,x_2\in E}$ με $\mathbf{x_1\ne x_2}$ ισχύει: $\mathbf{f(x_1)=f(x_2)}$.

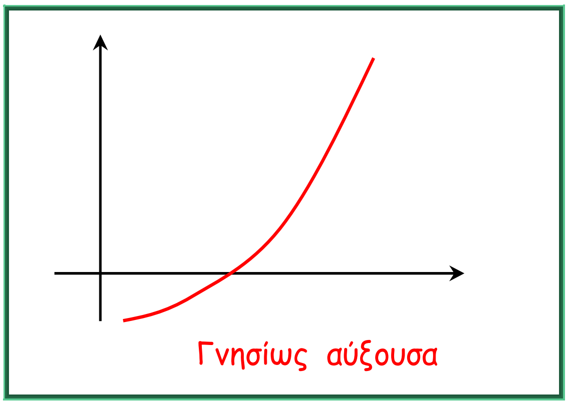
✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **σταθερή** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν: υπάρχει $\mathbf{c\in\mathbb{R}}$ ώστε $\mathbf{f(x)=c}$ για κάθε $\mathbf{x\in E}$.

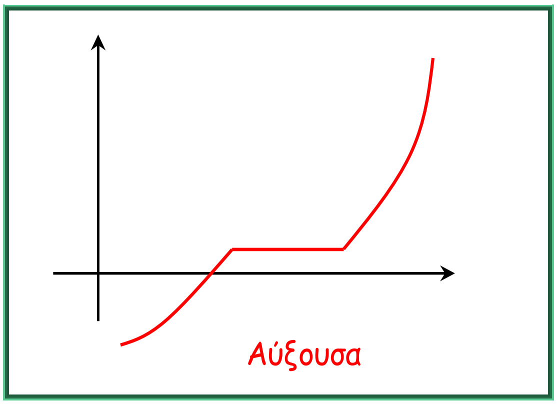
✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **γνησίως μονότονη** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{E\subseteq A}$.

✷ Μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ θα λέγεται **μονότονη** στο $\mathbf{E\subseteq A}$ όταν είναι αύξουσα ή φθίνουσα στο $\mathbf{E\subseteq A}$.

- ✦ Το είδος της μονοτονίας μιας συνάρτησης $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ μπορεί να αλλάζει στα διάφορα υποσύνολα του πεδίου ορισμού της.
- ✦ Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f:A\to\mathbb{R}}$ είναι (απλά) μονότονη στο , $\mathbf{E\subseteq A}$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον διάστημα $\mathbf{\Delta\subseteq E}$, στο οποίο η $\mathbf{f}$ είναι σταθερή.

✦ Η διαφορά στις γραφικές παραστάσεις μιας γνησίως αύξουσας και μιας αύξουσας συνάρτησης φένεται στα παρακάτω σχήματα.





7. ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

✸ Δύο συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ με $A,B\subseteq\mathbb{R}$ θα λέγονται **ίσες** όταν: $A=B$ και $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in A=B$.

✦ Οταν δύο συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ είναι ίσες, γράφουμε συμβολικά $f=g$.

✦ ΠΡΟΣΟΧΗ ! ! ! Για να είναι δύο συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ ίσες, πρέπει οποσδήποτε να έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

8. ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

✸ Εστω $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:B\to\mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

(i) Αν $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $\lambda f:A\to\mathbb{R}$ (**γινόμενο αριθμού με συνάρτηση**) με: $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.

(ii) Αν $\Gamma=A\cap B\neq\varnothing$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f+g:\Gamma\to\mathbb{R}$ (**άθροισμα συναρτήσεων**) με: $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

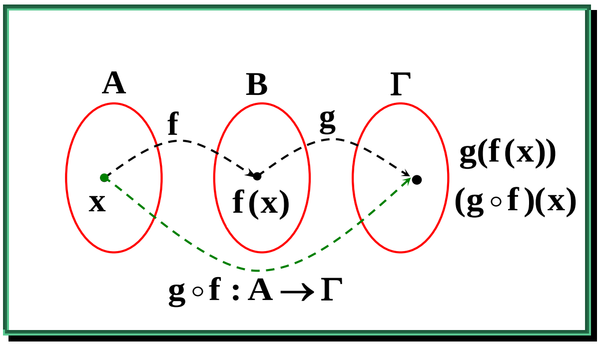
(iii) Αν $\Gamma=A\cap B\neq\varnothing$, τότε ορίζεται η συνάρτηση $f\cdot g:\Gamma\to\mathbb{R}$ (**γινόμενο συναρτήσεων**) με $(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)$

(iv) Αν $\Delta=\Gamma-\{x\in B:g(x)=0\}\neq\varnothing$, τότε ορίζεται η συνάρτηση

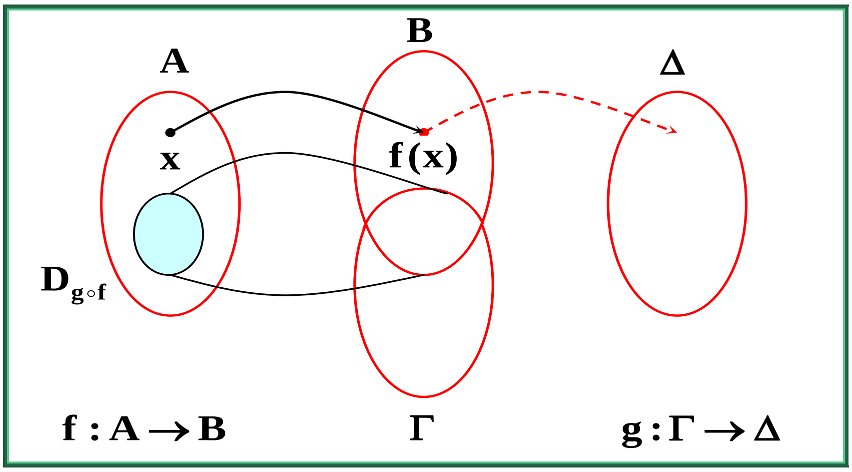
$\frac{f}{g}:\Delta \to \mathbb{R}$ **(πιλήκο συναρτήσεων)** με $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

9. ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

✷ Εστω $A,B,\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ και $f:A\to B$, $g:B\to\Gamma$ δύο συναρτήσεις. Ονομάζουμε **σύνθεση** των f και g τη συνάρτηση $g\circ f:A\to\Gamma$ με τύπο: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.



✷ Εστω $A,B,\Gamma,\Delta \subseteq \mathbb{R}$ και $f:A\to B$, $g:\Gamma\to\Delta$ δύο συναρτήσεις. Αν το σύνολο $D_{g\circ f}=\{x\in D_f : f(x)\in D_g\}\subseteq A$ είναι διάφορο του κενού συνόλου, τότε ορίζεται η συνάρτηση $g\circ f : D_{g\circ f}\to\Delta$ με τύπο: $(g\circ f)(x)=g(f(x))$.



10. "1-1" ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ θα λέγεται **ένα προς ένα** $(1-1)$, όταν: για κάθε $x_1,x_2\in A$ με $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει $x_1=x_2$.

- Η γραφική παράσταση μιάς "1-1" συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$, κόβεται από τον άξονα $x'x$ ή από ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$, σε ένα το πολύ σημείο.
- Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι "1-1".
- Κάθε περιοδική συνάρτηση δεν μπορεί να είναι "1-1".
- Κάθε άρτια συνάρτηση δεν μπορεί να είναι "1-1".

11. "επι" ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μία συνάρτηση $f:A\to B$ θα λέγεται **επί του** B, όταν: $f(A)=B$.

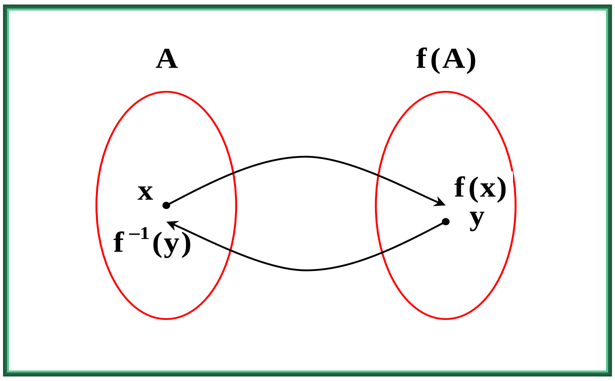
- Για να αποδείξουμε οτι μία συνάρτηση $f:A\to B$ είναι **επί του** B, αρκεί να αποδείξουμε ότι: "για κάθε $y\in B$ υπάρχει $x\in A$ ώστε: $f(x)=y$".
- Αντίστροφα αν μία συνάρτηση $f:A\to B$ είναι **επί του** B, τότε θα ισχύει ότι: "για κάθε $y\in B$ υπάρχει $x\in A$ ώστε: $f(x)=y$".
- Έστω $f:A\to B$ συνάρτηση και $\Gamma\subseteq B$. Ονομάζουμε **αντίστροφη εικόνα** του Γ το σύνολο $f^{-1}(\Gamma)=\{x\in A: f(x)\in\Gamma\}$.

  Παρατήρηση

  Γενικά το σύνολο $f^{-1}(\Gamma)=\{x\in A: f(x)\in\Gamma\}$, ορ'ίζεται ανεξάρτητα από την αντιστρεψιμότητα της συνάρτησης $f:A\to B$.

12. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν μία συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι "1-1" τότε ορίζεται η συνάρτηση: $f^{-1}:f(A)\to A$ με $f^{-1}(y)=x \leftrightarrow f(x)=y$ και λέγεται **αντίστροφη** της f.



✦ Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι "1-1" τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$\boxed{\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=f\left(f^{-1}(y)\right)=y}$ για κάθε $y\in f(A)$

$\boxed{\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x}$ για κάθε $x\in A$

✦ Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

∗ Αν η συνάρτηση $f:A\to B$ είναι "1-1" και επί του B, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}:B\to A$ με $f^{-1}(y)=x \leftrightarrow f(x)=y$.

∗ Αν η συνάρτηση $f:A\to B$ είναι "1-1" και επί του B, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$\left(f\circ f^{-1}\right)(y)=f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ για κάθε $y\in B$

$\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ για κάθε $x\in A$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1	Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=(1,+\infty)$.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

2	Οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x)=x+1$ είναι ίσες.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

3	Οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$ και $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$ είναι ίσες.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

4	Η συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ είναι άρτια.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

5	Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ βρίσκεται πάνω απο τον άξονα $x'x$.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

6	Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha=\beta$ τότε $f(\alpha)=f(\beta)$ για οποιοδήποτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .
. . . .

7	Η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=x^2+1}$ είναι "1-1".	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

8	Αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση $\mathbf{f\cdot g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

9	Αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}:\mathbb{R}\to(\mathbf{0,+\infty})$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση $\mathbf{f\cdot g}:\mathbb{R}\to(\mathbf{0,+\infty})$ είναι γνησίως αύξουσα.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

10	Αν οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε και η συνάρτηση $\mathbf{f+g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

11	Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττή τότε $\mathbf{f(0)=0}$.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

12	Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια τότε είναι '1-1'.	Σ ☐ Λ ☐

Παρατηρήσεις: . . . .

. . . .

1

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f(x)=\dfrac{1}{x-4}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

$h(x)=\dfrac{1}{x^2+3x-4}$ $\qquad \varphi(x)=\dfrac{1}{3x^2+5x-8}$

2

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x^2-25}$

$h(x)=\dfrac{1}{x^2+5x-6}$ $\qquad \varphi(x)=\dfrac{1}{5x^2+4x-9}$

3

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f_1(x)=\dfrac{1}{|x-4|}$ $\qquad f_2(x)=\dfrac{1}{|x|-4}$

$f_3(x)=\dfrac{1}{|x-4|-2}$ $\qquad f_4(x)=\dfrac{1}{|x-3|-|x-5|}$

$f_5(x)=\dfrac{1}{|2x-3|-2}$ $\qquad f_6(x)=\dfrac{1}{|2x-3|-|3x-5|}$

4

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f(x)=\dfrac{1}{|x-5|}$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{|x|-9}$

$h(x)=\dfrac{1}{|x-5|-3}$ $\qquad \varphi(x)=\dfrac{1}{|x-4|-|x-6|}$

$p(x)=\dfrac{1}{|2x-5|-3}$ $\qquad q(x)=\dfrac{1}{|2x-4|-|x-6|}$

5

Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$f(x)=\sqrt{x-4}$ $\qquad g(x)=\sqrt{x^2-4}$

$h(x)=\sqrt{|x|-4}$ $\qquad \varphi(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$

6	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\sqrt{x-9}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{x^2-9}$ $h(x)=\sqrt{\|x\|-9}$ $\quad$ $\varphi(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$
7	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\ln(x-3)$ $\quad$ $g(x)=\frac{1}{\ln(3-x)}$ $h(x)=\ln(\|x\|-4)$ $\quad$ $\varphi(x)=\ln(x^2-5x+4)$
8	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\ln(x-4)$ $\quad$ $g(x)=\frac{1}{\ln(5-x)}$ $h(x)=\ln(\|x\|-2)$ $\quad$ $\varphi(x)=\ln(x^2-6x+5)$
9	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{e^{x^2}-e^4}$ $h(x)=\sqrt{e^x-4}$ $\quad$ $\varphi(x)=\sqrt{e^{2x}-(e+1)e^x+e}$
10	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\sqrt{e^x-e}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{e^9-e^{x^2}}$ $h(x)=\sqrt{e^x-10}$ $\quad$ $\varphi(x)=\sqrt{e^{2x}-(e^2+1)e^x+e^2}$
11	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\ln(e-e^x)$ $\quad$ $g(x)=\ln(e^{16}-e^{x^2})$
12	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\ln(e^x-e)$ $\quad$ $g(x)=\ln(e^{x^2}-e^{16})$
13	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}$ $\quad$ $g(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

	$h(x)=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi x}$ $\quad$ $p(x)=\dfrac{1}{\sigma\varphi x}$
14	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\dfrac{1}{1-\eta\mu x}$ $\quad$ $g(x)=\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$ $h(x)=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi x}$ $\quad$ $p(x)=\dfrac{1}{1+\sigma\varphi x}$
15	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\sqrt{1-2\eta\mu x}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{1-\varepsilon\varphi x}$
16	Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων: $f(x)=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}$ $\quad$ $g(x)=\sqrt{\varepsilon\varphi x-1}$
17	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x-4}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $3f+2g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.
18	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$ και $g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.
19	Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 7\\ x-4 & x>7\end{cases}$ και $g(x)=\begin{cases}x-2 & x\le 7\\ 3x+4 & x>7\end{cases}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $3f+2g$, $f\cdot g$ και $\dfrac{f}{g}$.

20

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 7\\ 3x-4 & x>7\end{cases}$ και

$$g(x)=\begin{cases}3x & x\le 7\\ 2x+1 & x>7\end{cases}.$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $3f+2g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

21

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 7\\ x-4 & x>7\end{cases}$ και

$$g(x)=\begin{cases}x-2 & x\le 4\\ 3x+4 & x>4\end{cases}.$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $3f+2g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

22

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 7\\ x-4 & x>7\end{cases}$ και

$$g(x)=\begin{cases}x-2 & x\le 2\\ 3x+4 & x>2\end{cases}.$$

Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $3f+2g$, $f\cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

23

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+\omega)=f(x-\omega)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\omega\in\mathbb{R}^*$ (ω σταθερό), αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.

24

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+\omega)=f(x+5\omega)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\omega\in\mathbb{R}^*$ (ω σταθερό), αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.

25

Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $f(x+2\omega)=f(x+\nu\omega)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\omega\in\mathbb{R}^*$ (ω σταθερό) και $\nu\in\mathbb{N}^*$(ν σταθερό), αποδείξτε ότι η f είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.

26	Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbf{f(x+\omega)+f(x-\omega)=0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^*$ ($\boldsymbol{\omega}$ σταθερό), αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.
27	Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbf{f(x+\omega)+f(x+2\omega)=0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^*$ ($\boldsymbol{\omega}$ σταθερό), αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.
28	Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $\mathbf{f(x+\omega)+f(x+2\omega)+f(x+3\omega)+\cdots+f(x+k\omega)=0}$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbb{R}$, $\boldsymbol{\omega}\in\mathbb{R}^*$ ($\boldsymbol{\omega}$ σταθερό) και $\mathbf{k}\in\mathbb{N}^*$ ($\mathbf{k}$ σταθερό), αποδείξτε ότι η $\mathbf{f}$ είναι περιοδική και να βρεθεί μία περίοδός της.
29	Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}}$ και $\mathbf{g(x)=\dfrac{x-3}{x-4}}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $\mathbf{f\circ g}$, και $\mathbf{g\circ f}$.
30	Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}}$ και $\mathbf{g(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4}}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $\mathbf{f\circ g}$ και $\mathbf{g\circ f}$.
31	Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\begin{cases}2x-1 & x\le 7\\ x-4 & x>7\end{cases}}$ και $\mathbf{g(x)=x^2+6x}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $\mathbf{f\circ g}$, και $\mathbf{g\circ f}$.
32	Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x)=\begin{cases}3x-2 & x\le 4\\ 2x-7 & x>4\end{cases}}$ και $\mathbf{g(x)=x^2+3x}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις: $\mathbf{f\circ g}$, και $\mathbf{g\circ f}$.
33	Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=3x+2}$. Να αποδειχτεί οτι η $\mathbf{f}$ είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η $\mathbf{f^{-1}}$.

34	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x-1$. Να αποδειχτεί οτι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

35	Δίνεται η συνάρτηση $f:[3,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2-6x+2$. Να αποδειχτεί οτι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

36	Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2-2x+2$. Να αποδειχτεί οτι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

37	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$. Να αποδειχτεί οτι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

38	Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$. Να αποδειχτεί οτι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η f^{-1}.

39	Αν πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=[2,8]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=f(2x-1)$.

40	Αν πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $D_f=[1,5]$, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=f(x^2+1)$.

41	Αν για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει: $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

42	Αν για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει, $f\left(\frac{3x+f(x)}{4}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

43	Αν για τη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει,

	$f\left(\frac{kx+f(x)}{k+1}\right)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $k>-1$, αποδείξτε ότι: $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
44	Δίνονται οι συναρτήσεις $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με: $g(g(x))=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $k\in\mathbb{R}$ με $\lvert k\rvert\neq 1$. Να βρεθεί συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $kf(x)+f(g(x))=h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
45	Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x))+f^3(x)=2x+3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι "ένα προς ένα". **β)** Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x^3+x)=f(4-x)$.
46	Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση: $f(f(x))+f(x)=3x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, **α)** Να αποδείξετε ότι η f είναι "ένα προς ένα". **β)** Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^3+x)=f(3-x)$.
47	Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $f(\alpha+\beta)=(f\circ f)(\alpha)+(f\circ f)(\beta)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$.
48	Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $(f\circ f\circ f)(x)=3x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: $f(1)=1$.
49	Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: $f(1)=1$.
50	Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $(f\circ f\circ f)(x)=2x-3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: $f(3)=3$.

51	Αν για τη συνάρτηση $\mathbf{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $$(f\circ f)(x)=x^2-x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$ Αποδείξτε ότι: $f(1)=1$.

52	Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $$(f\circ f)(x)=x^2-3x+4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$ Αποδείξτε ότι: $f(2)=2$.

53	Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση: $$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$ και υπάρχει $\gamma\in\mathbb{R}$ ώστε $f(\gamma)\neq 0$. Αποδείξτε ότι: (i) $f(0)=1$ (ii) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

54	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε η συνάρτηση $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

55	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσες , τότε η συνάρτηση $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

56	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσες, τότε η συνάρτηση $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα.

57	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι "1-1", τότε η συνάρτηση $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι "1-1", .

58	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτιες , τότε και οι συναρτήσεις $f\cdot g,f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτιες.

59	Αν οι συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττές , τότε και οι συναρτήσεις $f\circ g,f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι περιττές, ενώ η συνάρτηση $fg:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι άρτια.