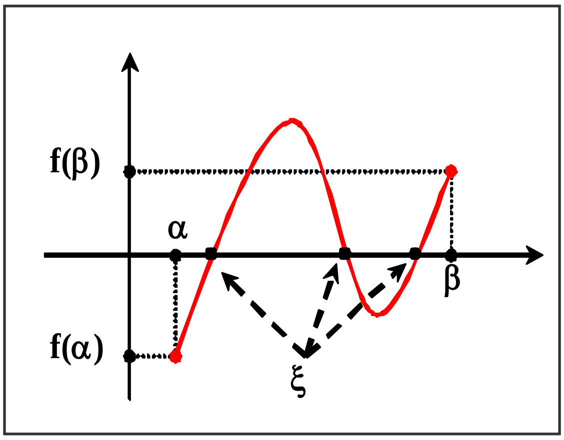
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι μία σημαντική κλάση των πραγματικών συναρτήσεων μιάς πραγματικής μεταβλητής. Τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων σε συνδυασμό με τη μονοτονία, μας βοηθούν να βγάλουμε σημαντικά συμπεράσματα γιά τη συμπεριφορά των συνεχών συναρτήσεων. Στόχος του άρθρου αυτού είναι κυρίως η ανάδειξη του σημαντικού ρόλου που παίζει το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης.

1. Θεώρημα Bolzano

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=0$.

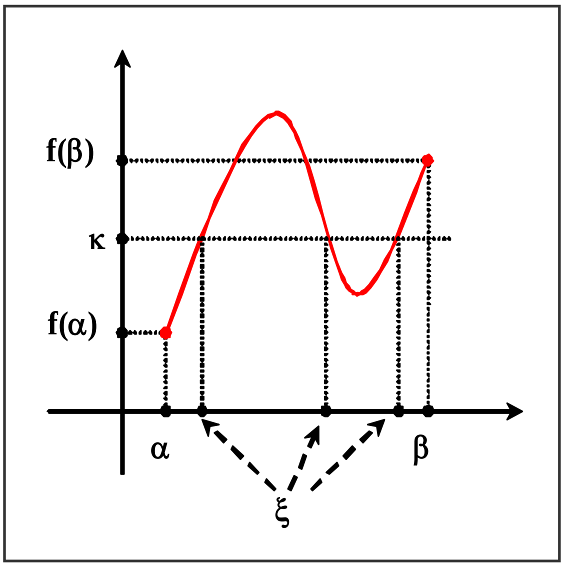
Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β).



2. Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, τότε για κάθε κ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\kappa$.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x)-\kappa=0$, έχει μία τουλάχιστον λύση στο (α,β).



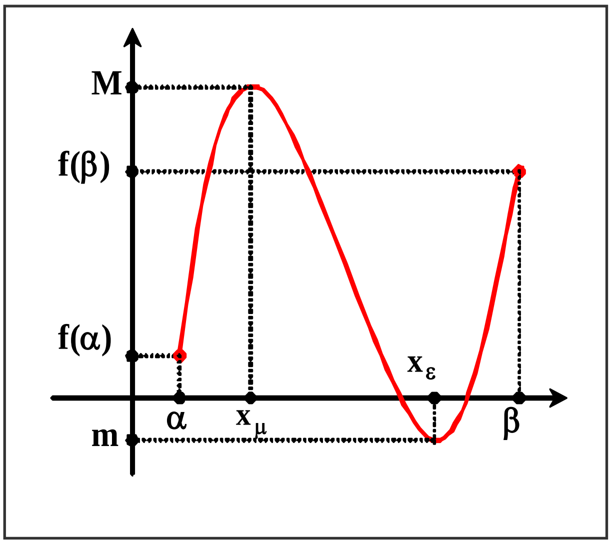
3. Θεώρημα Μέγιστης & Ελάχιστης Τιμής

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σ'αυτό.

Δηλαδή υπάρχουν $x_\varepsilon, x_\mu\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_\varepsilon)\leq f(x)\leq f(x_\mu)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αν τώρα θέσουμε $f(x_\varepsilon)=m$ (την ελάχιστη τιμή της $\mathbf{f}$) και $f(x_\mu)=M$ (τη μέγιστη τιμή της $\mathbf{f}$), τότε το θεώρημα θα μπορούσε να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $m\leq f(x)\leq M$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.



Παρατήρηση 1

Με τη βοήθεια του Θεωρήματος του Bolzano, μπορούμε να αποδείξουμε ότι μία εξίσωση έχει ρίζα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών και στη συνέχεια με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή (Μέθοδος της διχοτόμησης) να την προσεγγίσουμε, όσο κοντά επιθυμούμε.

Παρατήρηση 2

Το σύνολο τιμών μίας συνεχούς συνάρτησης $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, είναι κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή οι συνεχείς συναρτήσεις απεικονίζουν κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$ σε κλειστά διαστήματα του $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση 3

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$, τότε υπάρχει ένα ακριβώς $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=0$.
Δηλαδή η εξίσωση $f(x)=0$, έχει μία ακριβώς λύση στο (α,β).

Παρατήρηση 4
Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής $[\alpha,\beta]$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε η συνάρτηση f θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο (α,β).
Δηλαδή θα ισχύει:

$$f(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta)$$

ή

$$f(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta).$$

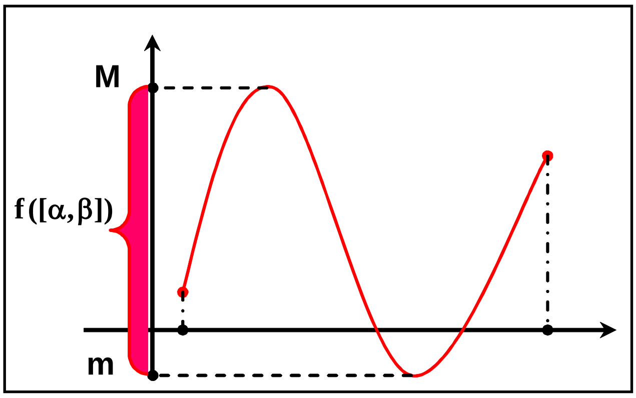
Παρατήρηση 5
Κατά την εφαρμογή του Θεωρήματος του Bolzano, μπορεί να προκύψει $f(\alpha)\cdot f(\beta)\leq 0$. Τότε έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
Αν μπορεί να συμβεί $f(\alpha)=0$ και $f(\beta)\neq 0$ τότε θα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta)$ ώστε: $f(\xi)=0$
Αν μπορεί να συμβεί $f(\alpha)\neq 0$ και $f(\beta)=0$ τότε θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta]$ ώστε: $f(\xi)=0$.
Αν τέλος μπορεί να συμβεί $f(\alpha)=0$ και $f(\beta)=0$ τότε θα υπάρχει $\xi\in[\alpha,\beta]$ ώστε: $f(\xi)=0$.

Παρατήρηση 6
Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο ανοικτό διάστημα (α,β), $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)=A$ και $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)=B$, τότε σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το ανοικτό διάστημα (A,B) (όταν η f είναι γνησίως αύξουσα) ή το ανοικτό διάστημα (B,A) (όταν η f είναι γνησίως φθίνουσα).

Παρατήρηση 7
Σχόλιο
(Σχολικό βιβλίο σελίδα 195)
Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής και το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών προκύπτει ότι το **σύνολο τιμών** μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, είναι το κλειστό διάστημα $[m,M]$, όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.
Ορισμός συνόλου τιμών
(Σχολικό βιβλίο σελίδα 133)
Σύνολο τιμών μιας συνάρτησης $f:A\to\mathbb{R}$ είναι το σύνολο $f(A)$ που αποτελείται απο εκείνα τα $y\in\mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει ένα τουλάχιστον $x\in A$, τέτοιο ώστε $f(x)=y$. Δηλαδή το $f(A)$ αποτελείται απο εκείνα τα $y\in\mathbb{R}$ που είναι εικόνες ενός τουλάχιστον $x\in A$.

Συνδυάζοντας το παραπάνω σχόλιο και τον ορισμό του συνόλου τιμών καταλήγουμε στο παρακάτω συμπέρασμα (που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί σαν μία παραλλαγή ή γενίκευση του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών).

ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ
Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε για κάθε $\kappa\in[m,M]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)=\kappa$. Όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη (αντίστοιχα) τιμή της f στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.



Η παραπάνω παραλλαγή είναι ένα ακόμη “εργαλείο” για την λύση ασκήσεων που αναφέρονται στα θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων και διαθέτει το “τυπικό προσόν” να μη ξεφεύγει από την ύλη του σχολικού βιβλίου. Επίσης μας δίνει τη δυνατότητα να αντιμετωπίζουμε και ασκήσεις που μας ζητούν να αποδείξουμε ότι: “υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ που ανήκει στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$”.Δεδομένου ότι όλες οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου, μας ζητούν να αποδείξουμε ότι “υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ που ανήκει στο ανοικτό διάστημα (α,β), ώστε να ισχύει $f(\xi)=0$”

Παρακάτω λύνουμε μία κλασική άσκηση με τρείς διαφορετικούς τρόπους. Με ένα τουλάχιστον από αυτούς τους τρόπους αντιμετωπίζεται η πλειονότητα των ασκήσεων που αναφέρονται στα Θεωρήματα των Συνεχών Συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 1
Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και κ,λ είναι θετικοί

πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}.$$

Λύση

1^{ος} τρόπος

(Θέλουμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$$
$$(\kappa+\lambda)f(\xi)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)$$
$$(\kappa+\lambda)f(\xi)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=0.)$$

Η τελευταία ισότητα μας οδηγεί να θεωρήσουμε κατάλληλη συνάρτηση $g:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με

$$g(x)=(\kappa+\lambda)f(x)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)$$

και να εφαρμόσουμε το Θεώρημα του **Bolzano**

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Υπολογίζουμε τα $g(\alpha)$ και $g(\beta)$.

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=(\kappa+\lambda)f(\alpha)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=\\&=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\alpha)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=\\&=\lambda\big(f(\alpha)-f(\beta)\big).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(\beta)&=(\kappa+\lambda)f(\beta)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=\\&=\kappa f(\beta)+\lambda f(\beta)-\kappa f(\alpha)-\lambda f(\beta)=\\&=-\kappa\big(f(\alpha)-f(\beta)\big).\end{aligned}$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και

$$g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\kappa\lambda\big(f(\alpha)-f(\beta)\big)^2<0.$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano**, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

2^{ος} τρόπος

Εφόσον $f(\alpha)\neq f(\beta)$, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $f(\alpha)<f(\beta)$. Τότε πολλαπλασιάζοντας τη ανισότητα αυτή με τους θετικούς αριθμούς κ και λ έχουμε:

$$\begin{cases}\kappa f(\alpha)<\kappa f(\beta)\\ \lambda f(\alpha)<\lambda f(\beta)\end{cases}$$

Προσθέτουμε το $\lambda f(\beta)$ στη πρώτη και το $\kappa f(\alpha)$ στη δεύτερη.

$$\begin{cases}\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)<\kappa f(\beta)+\lambda f(\beta)\\ \lambda f(\alpha)+\kappa f(\alpha)<\lambda f(\beta)+\kappa f(\alpha)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)<(\kappa+\lambda)f(\beta)\\ (\kappa+\lambda)f(\alpha)<\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow(\kappa+\lambda)f(\beta)<\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)<(\kappa+\lambda)f(\beta).$$

Άρα $f(\alpha)<\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}<f(\beta)$.

Δηλαδή ο αριθμός $\rho=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$ βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών, θα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}=\rho.$$

3^{ος} τρόπος

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$m\le f(x)\le M \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, άρα και για $x=\alpha$ και για $x=\beta$.δηλαδή θα ισχύουν οι ανισότητες :

$$\begin{cases}m\le f(\alpha)\le M\\ m\le f(\beta)\le M\end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες με τους θετικούς αριθμούς κ και λ αντίστοιχα.

$$\begin{cases}\kappa m\le f(\alpha)\le \kappa M\\ \lambda m\le f(\beta)\le \lambda M\end{cases}$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη.

$$(\kappa+\lambda)m\le f(\alpha)+f(\beta)\le(\kappa+\lambda)M$$

Διαιρούμε με $\kappa+\lambda>0$ και έχουμε:

$$m\le\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}\le M.$$

Δηλαδή ο αριθμός $\rho=\dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f, οπότε σύμφωνα με το Βασικό Συμπέρασμα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\rho=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda}.$$

Με την απαγωγή εις άτοπο θα αποδείξουμε ότι $\xi\neq\alpha$ και $\xi\neq\beta$.

Έστω ότι $\xi=\alpha$ τότε:

$$f(\alpha)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)}{\kappa+\lambda} \text{ ή}$$
$$(\kappa+\lambda)f(\alpha)=\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta) \text{ ή}$$
$$\lambda f(\alpha)=\lambda f(\beta) \text{ ή}$$
$$f(\alpha)=f(\beta) \text{ Άτοπο.}$$

Όμοια και για $\xi=\beta$.

Παρατήρηση
Η παραπάνω άσκηση ισχύει και στη περίπτωση που $\kappa\cdot\lambda>0$. Επίσης μπορεί να γενικευτεί ή και να εξειδικευθεί. Για παράδειγμα αναφέρουμε τις παρακάτω ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{3f(\alpha)+4f(\beta)}{7}.$$

(Χρησιμοποιείστε οποιουσδήποτε θετικούς ακέραιους στη θέση των κ, λ και φτιάξτε τη δική σας άσκηση)

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ και $\beta\in(\alpha,\gamma)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}.$$

Λύση

1ος τρόπος

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\gamma]$, θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$m\leq f(x)\leq M \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\gamma].$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$, άρα και για $x=\alpha$, για $x=\beta$ και για $x=\gamma$ δηλαδή θα ισχύουν οι ανισότητες :

$$\begin{cases} m\leq f(\alpha)\leq M \\ m\leq f(\beta)\leq M \\ m\leq f(\gamma)\leq M \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη

$$3m\leq f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\leq 3M \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow m\leq\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}\leq M.$$

Δηλαδή ο αριθμός $\rho=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f, οπότε σύμφωνα με το Βασικό Συμπέρασμα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\rho=\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3}.$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=3f(x)-f(\alpha)-f(\beta)-f(\gamma) \quad (1).$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα του-λάχιστον $\xi\in[\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση **(1)** διαδοχικά όπου x το α, το β και το γ, οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\begin{cases} g(\alpha)=3f(\alpha)-f(\alpha)-f(\beta)-f(\gamma) \\ g(\beta)=3f(\beta)-f(\alpha)-f(\beta)-f(\gamma) \\ g(\gamma)=3f(\gamma)-f(\alpha)-f(\beta)-f(\gamma) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις ισότητες κατά μέλη και έχουμε:

$$g(\alpha)+g(\beta)+g(\gamma)=0 \quad (2)$$

Αν τώρα $g(\alpha)=0$ ή $g(\beta)=0$ ή $g(\gamma)=0$, τότε υπάρχει $\xi\in[\alpha,\gamma]$ ($\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$ ή $\xi=\gamma$), τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Αν όμως $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma)\neq 0$, τότε από τη σχέση **(2)** συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $g(\alpha)$ και $g(\beta)$ και $g(\gamma)$, αποκλείεται να είναι ομόσημοι (διότι είναι μη μηδενικοί και έχουν αθροισμα μηδέν). Άρα δύο τουλάχιστον από αυτούς θα είναι ετερόσημοι.

Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί $g(\beta)$ και $g(\gamma)$ είναι ετερόσημοι (δηλαδή $g(\beta)\cdot g(\gamma)<0$). Τότε θα ισχύει για την συνάρτηση g το Θεώρημα του **Bolzano** στο $[\beta,\gamma]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\beta,\gamma]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω f συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha,\gamma]$ και $\beta\in(\alpha,\gamma)$. Αν κ,λ,μ είναι ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)=\frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}.$$

Λύση

1ος τρόπος

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\gamma]$, θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$m\leq f(x)\leq M \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\gamma].$$

(Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ,μ είναι θετικοί.)

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x\in[\alpha,\gamma]$, άρα και για $x=\alpha$, για $x=\beta$ και για $x=\gamma$ δηλαδή θα ισχύουν οι ανισότητες :

$$\begin{cases} m\leq f(\alpha)\leq M \\ m\leq f(\beta)\leq M \\ m\leq f(\gamma)\leq M \end{cases}$$

(Πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες με κ,λ,μ αντίστοιχα)

$$\begin{cases} \kappa m \le \kappa f(\alpha) \le \kappa M \\ \lambda m \le \lambda f(\beta) \le \lambda M \\ \mu m \le \mu f(\gamma) \le \mu M \end{cases}$$

(Προσθέτουμε τις ανισότητες κατά μέλη και διαιρούμε με $\kappa+\lambda+\mu>0$)

$$m \le \frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu} \le M$$

Δηλαδή ο αριθμός $\rho = \dfrac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}$, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f, οπότε σύμφωνα με το Βασικό Συμπέρασμα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \rho = \frac{\kappa f(\alpha)+\lambda f(\beta)+\mu f(\gamma)}{\kappa+\lambda+\mu}.$$

2ος τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (\kappa+\lambda+\mu)f(x) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) - \mu f(\gamma) \quad (1).$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα του-λάχιστον $\xi \in [\alpha,\gamma]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Αντικαθιστούμε στη σχέση **(1)** διαδοχικά όπου x το α, το β και το γ, οπότε προκύπτουν οι ισότητες:

$$\begin{cases} g(\alpha) = (\kappa+\lambda+\mu)f(\alpha) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) - \mu f(\gamma) \\ g(\beta) = (\kappa+\lambda+\mu)f(\beta) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) - \mu f(\gamma) \\ g(\gamma) = (\kappa+\lambda+\mu)f(\gamma) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) - \mu f(\gamma) \end{cases}$$

(Εκτελούμε πράξεις και απλοποιούμε)

$$\begin{cases} g(\alpha) = (\lambda+\mu)f(\alpha) - \lambda f(\beta) - \mu f(\gamma) \\ g(\beta) = (\kappa+\mu)f(\beta) - \kappa f(\alpha) - \mu f(\gamma) \\ g(\gamma) = (\kappa+\lambda)f(\gamma) - \kappa f(\alpha) - \lambda f(\beta) \end{cases}$$

(Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες με κ,λ,μ αντί-στοιχα)

$$\begin{cases} \kappa g(\alpha) = \kappa(\lambda+\mu)f(\alpha) - \kappa\lambda f(\beta) - \kappa\mu f(\gamma) \\ \lambda g(\beta) = \lambda(\kappa+\mu)f(\beta) - \kappa\lambda f(\alpha) - \lambda\mu f(\gamma) \\ \mu g(\gamma) = \mu(\kappa+\lambda)f(\gamma) - \kappa\mu f(\alpha) - \lambda\mu f(\beta) \end{cases}$$

Προσθέτουμε τις ισότητες κατά μέλη και έχουμε:

$$\kappa g(\alpha) + \lambda g(\beta) + \mu g(\gamma) = 0 \quad (2)$$

Αν τώρα $g(\alpha)=0$ ή $g(\beta)=0$ ή $g(\gamma)=0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\gamma]$ ($\xi=\alpha$ ή $\xi=\beta$ ή $\xi=\gamma$), τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Αν όμως $g(\alpha)\cdot g(\beta)\cdot g(\gamma) \ne 0$, τότε από τη σχέση **(2)** συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί $\kappa g(\alpha)$ και $\lambda g(\beta)$ και $\mu g(\gamma)$, αποκλείεται να είναι ομόσημοι (διότι είναι μη μηδενικοί , οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ,μ είναι θετικοί και έχουν άθροισμα μηδέν). Άρα δύο τουλάχιστον από αυτούς θα είναι ετερόσημοι.

Ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί $\lambda g(\beta)$ και $\mu g(\gamma)$ είναι ετερόσημοι (δηλαδή $\lambda g(\beta)\cdot \mu g(\gamma) < 0$). Τότε $g(\beta)\cdot g(\gamma) < 0$, οπότε θα ισχύει για την συνάρτηση g το Θεώρημα του **Bolzano** στο $[\beta,\gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\beta,\gamma]$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Στις επόμενες ασκήσεις θα δούμε την εφαρμογή όλων των θεωρημάτων των συνεχών συναρτήσεων. Οι περισσότερες από αυτές είναι γενικές ασκήσεις, οπότε με κατάλληλη τροποποίηση και απλούστευση μπορούν να δημιουργήσουν μία άλλη σειρά ασκήσεων.

Κύρια "πηγή" των ασκήσεων είναι το βιβλίο: *"Απειροστικός Λογισμός Ι"* των Σ. Νεγρεπόντη, Σ. Γιωτόπουλου και Ε. Γιαννακούλια.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Εστω $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0)=f(2)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_0, y_0 \in [0,2]$ με $|x_0-y_0|=1$ ώστε $f(x_0)=f(y_0)$.

Λύση

Έχουμε: $|x_0-y_0|=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x_0-y_0=1 \text{ ή } x_0-y_0=-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y_0=x_0-1 \text{ ή } y_0=x_0+1).$$

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=f(x_0-1)$ ή $f(x_0)=f(x_0+1)$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$g:[1,2]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-f(x-1)$ και

$h:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)-f(x+1)$ **(*)**.

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,2]$ τέτοιο ώστε: $g(x_0)=0$ ή $h(x_0)=0$.

$g(1)=f(1)-f(0)$

$g(2)=f(2)-f(1)=f(0)-f(1)$

Άρα $g(1)\cdot g(2) = -(f(1)-f(0))^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow g(1)\cdot g(2) \le 0.$$

Η g είναι συνεχής στο $[1,2]$.

Αν $g(1)\cdot g(2)<0$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano,** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε: $g(\xi_1)=0$

Αν $g(1)\cdot g(2)=0$ τότε $g(1)=0$ ή $g(2)=0$, οπότε $\xi_1=1$ ή $\xi_1=2$

Τελικά θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\boxed{\xi_1\in[1,2] \text{ τέτοιο ώστε: } g(\xi_1)=0 \quad (1)}$

$h(0)=f(0)-f(1)$

$h(1)=f(1)-f(2)=f(1)-f(0)$

Άρα $h(0)\cdot h(1)=-(f(1)-f(0))^2\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h(0)\cdot h(1)\le 0$

Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$.

Αν $h(0)\cdot h(1)<0$, τότε σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano,** θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $h(\xi_2)=0$

Αν $h(0)\cdot h(1)=0$ τότε $h(0)=0$ ή $h(1)=0$, οπότε $\xi_2=0$ ή $\xi_2=1$.

Τελικά θα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\boxed{\xi_2\in[0,1] \text{ τέτοιο ώστε: } h(\xi_2)=0 \quad (2)}$

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** (θέτοντας $x_o=\xi_1$ ή $x_o=\xi_2$) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_o\in[0,2]$ τέτοιο ώστε: $g(x_o)=0$ ή $h(x_o)=0$.

(*) *Εφόσον πεδίο ορισμού της συνάρτησης* f, *είναι το κλειστό διάστημα* $\Delta=[0,2]$ *και*

$$g(x)=f(x)-f(x-1),$$

πρέπει να ισχύουν οι ανισώσεις:

$$\begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 0\le x-1\le 2 \end{cases} \text{δηλαδή} \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ 1\le x\le 3 \end{cases}.$$

Άρα το x *θα ανήκει στο κλειστό διάστημα* $[1,2]$, *που θα αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης* g.

Όμοια και για τη συνάρτηση h, *βρίσκουμε ότι το πεδίο ορισμού της είναι το κλειστό διάστημα* $[0,1]$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Εστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_o,y_o\in[\alpha,\beta]$ με $|x_o-y_o|=\frac{\beta-\alpha}{2}$ ώστε $f(x_o)=f(y_o)$.

Υπόδειξη

(Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση.)

$$|x_o-y_o|=\frac{\beta-\alpha}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(y_o=x_o-\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ ή } y_o=x_o+\frac{\beta-\alpha}{2}\right).$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$g:\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-f\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ και

$h:\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=f(x)-f\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του **Bolzano,** για τη συνάρτηση g στο κλειστό διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right]$ και για τη συνάρτηση h στο κλειστό διάστημα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Εστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση ώστε $f(0)=f(1)$ και n θετικός φυσικός αριθμός. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1)$ ώστε $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g:\left[0,\frac{n-1}{n}\right]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[0,1)$ ώστε $g(\xi)=0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,\frac{n-1}{n}]$, οπότε θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $m,M\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$m\le g(x)\le M \text{ για κάθε } x\in[0,1).$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $x\in[0,1)$, άρα και για $x=0$, για $x=\frac{1}{n}$, για $x=\frac{2}{n}$, ... για $x=\frac{n-2}{n}$ και για $x=\frac{n-1}{n}$. Δηλαδή θα ισχύουν οι ανισότητες :

$$\begin{cases} m\le g(0)\le M \\ m\le g\left(\frac{1}{n}\right)\le M \\ m\le g\left(\frac{2}{n}\right)\le M \\ \vdots \\ m\le g\left(\frac{n-2}{n}\right)\le M \\ m\le g\left(\frac{n-1}{n}\right)\le M \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \le f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right) \le M \\ m \le f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right) \le M \\ m \le f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{3}{n}\right) \le M \\ \vdots \\ m \le f\left(\frac{n-2}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) \le M \\ m \le f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) \le M \end{cases}.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες κατά μέλη έχουμε: $m \le 0 \le M$. Δηλαδή το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g, οπότε σύμφωνα με το Βασικό Συμπέρασμα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [0,1)$ ώστε $g(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Εστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση και $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [\alpha,\beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = nf(x) - \big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) \quad (1)$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Θέτουμε στη σχέση (1), διαδοχικά όπου x τα $x_1, x_2, \cdots, x_n$ και πέρνουμε τις παρακάτω ισότητες.:

$$\begin{cases} g(x_1) = nf(x_1) - \big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) \\ g(x_2) = nf(x_2) - \big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) \\ \vdots \\ g(x_n) = nf(x_n) - \big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) \end{cases}$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ισότητες έχουμε:

$$g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n) = 0 \quad (2)$$

1^{ος} τρόπος

Αν κάποιο απο τα $g(x_1), g(x_2), \cdots, g(x_n)$ της σχέσης (2) είναι μηδέν, τότε προφανώς θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$ ($\xi = x_1$ ή $\xi = x_2$ ή . . . ή $\xi = x_n$) τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

Αν $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot \cdots \cdot g(x_n) \ne 0$, τότε δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς $g(x_1), g(x_2), \cdots, g(x_n)$, θα είναι ετερόσημοι. (Διότι είναι μη μηδενικοί και έχουν άθροισμα μηδέν).

Έστω ότι $g(x_i) \cdot g(x_j) < 0$ με $x_i < x_j$.

Για τη συνεχή συνάρτηση g ισχύει το Θεώρημα του **Bolzano** στο $[x_i, x_j]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_i, x_j)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$.

2^{ος} τρόπος

Εφόσον η συνάρτηση g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Δηλαδή υπάρχουν $m, M \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$m \le g(x) \le M \text{ για κάθε } x \in [\alpha,\beta].$$

Άρα θα ισχύουν οι ανισότητες:

$$\begin{cases} m \le g(x_1) \le M \\ m \le g(x_2) \le M \\ \vdots \\ m \le g(x_n) \le M \end{cases}.$$

Προσθέτοντας τις ανισώσεις έχουμε:

$$n \cdot m \le g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n) \le n \cdot M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m \le \frac{g(x_1) + g(x_2) + \cdots + g(x_n)}{n} \le M \Rightarrow$$

(λόγω της (2))

$$\Rightarrow m \le 0 \le M.$$

Δηλαδή το μηδέν, ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης g, οπότε σύμφωνα με το Βασικό Συμπέρασμα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε: $g(\xi) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Εστω $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [\alpha,\beta]$ και $k_1, k_2, \cdots, k_n$ θετικοί ακέραιοι. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\alpha,\beta]$, τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{k_1 f(x_1) + k_2 f(x_2) + \cdots + k_n f(x_n)}{k_1 + k_2 + \cdots + k_n}.$$

Υπόδειξη

(Εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση.)

Στη συνέχεια παραθέτουμε μία σειρά από διάφορες ασκήσεις που αναφέρονται στις συνεχείς συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Ορειβάτης ξεκινά απο τη βάση B ενός βουνού στις $6\,\pi\mu$ και φτάνει στη κορυφή K στις $4\,\mu\mu$ (της ίδιας ημέρας). Την επόμενη ημέρα ξεκινά από τη κορυφή K στις $6\,\pi\mu$ και ακολουθόντας την ίδια διαδρομή κατεβαίνει στη βάση B στις $4\,\mu\mu$ (της ίδιας ημέρας). Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται ο ορειβάτης την ίδια χρονική στιγμή και όταν ανεβαίνει και όταν κατεβαίνει.

Λύση

1ος τρόπος

Έστω $\mathbf{f}$ η συνάρτηση που περιγράφει τη κίνηση του ορειβάτη κατά την άνοδο ($\mathbf{f(t)}$ είναι το διάστημα που διανύει συναρτήσει του χρόνου $\mathbf{t}$) και $\mathbf{g}$ η συνάρτηση που περιγράφει τη κίνηση του ορειβάτη κατά την κάθοδο. Οι συναρτήσεις $\mathbf{f,g}$ είναι συνεχείς και επιπλέον ισχύουν οι ισότητες:

$\mathbf{f(6)=g(16)}$ (διότι τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=6}$ τη πρώτη ημέρα και τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=16}$ τη δεύτερη ημέρα ο ορειβάτης βρίσκεται στη βάση του βουνού)

$\mathbf{f(16)=g(6)}$ (διότι τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=16}$ τη πρώτη ημέρα και τη χρονική στιγμή $\mathbf{t=6}$ τη δεύτερη ημέρα ο ορειβάτης βρίσκεται στη κορυφή του βουνού)

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $\mathbf{h(t)=f(t)-g(t)}$.

Η $\mathbf{h}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[6,16]}$ και

$$\mathbf{h(6)\cdot h(16)=\left(f(6)-g(6)\right)\cdot\left(f(16)-g(16)\right)=}$$
$$\mathbf{=\left(f(6)-g(6)\right)\cdot\left(g(6)-f(6)\right)=-\left(f(6)-g(6)\right)^2<0}$$

Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano**, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{t_o\in(6,16)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{h(t_o)=0}$.

Δηλαδή τη χρονική στιγμή $\mathbf{t_o}$, ο ορειβάτης θα βρίσκεται στη θέση $\mathbf{f(t_o)=g(t_o)}$ και όταν ανεβαίνει και όταν κατεβαίνει.

2ος τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι τη στιγμή που ο ορειβάτης ξεκινάει την κάθοδο από τη κορυφή (δεύτερη ημέρα), η “σκιά” του (ή ο “κλώνος” του αν θέλετε) ξεκινάει ταυτόχρονα από τη βάση του βουνού και ανεβαίνει (ακριβώς όπως ο πραγματικός ορειβάτης τη προηγούμενη ημέρα) προς τη κορυφή.

Η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η στιγμή που θα “συναντηθεί” ο ορειβάτης με τη “σκιά” του.

ΑΣΚΗΣΗ 11

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}$ είναι "1−1" και συνεχής, αποδείξτε ότι είναι γνησίως μονότονη.

Λύση

Έστω $\mathbf{x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}}$ με $\mathbf{x_1<x_2<x_3}$.

Έστω επίσης ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ δεν είναι ούτε γνησίως αύξουσα ούτε γνησίως φθίνουσα τότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)<f(x_3)}$ και $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)>f(x_3)}$. Δηλαδή το $\mathbf{f(x_2)}$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $\mathbf{f(x_1)}$ και στο $\mathbf{f(x_3)}$.

Οπότε θα ισχύει μία από τις ανισότητες:

$$\mathbf{f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)\quad(1)}$$
$$\mathbf{f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)\quad(2)}$$
$$\mathbf{f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)\quad(3)}$$
$$\mathbf{f(x_2)>f(x_1)>f(x_3)\quad(4)}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η $\mathbf{(1)}$.

εφόσον το $\mathbf{f(x_3)}$ βρίσκεται μεταξύ του $\mathbf{f(x_1)}$ και στο $\mathbf{f(x_2)}$, θα υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών $\mathbf{\xi\in(x_1,x_2)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{f(x_3)=f(\xi)}$. Δηλαδή για $\mathbf{\xi<x_3}$ έχουμε $\mathbf{f(x_3)=f(\xi)}$. Άτοπο διότι η $\mathbf{f}$ είναι **"1−1"**.

Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύουν οι ανισότητες $\mathbf{(2)}$, $\mathbf{(3)}$ ή $\mathbf{(4)}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Αν $\mathbf{0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}}$ και η συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ με $\mathbf{f(\alpha)\neq f(\beta)}$, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{f(\xi)=f(\alpha)\cdot \eta\mu^2\xi+f(\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\xi}.$$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{g(x)=f(x)-f(\alpha)\cdot\eta\mu^2x-f(\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu^2x}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{g(\xi)=0}$.

Η συνάρτηση $\mathbf{g}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$.

$$\mathbf{g(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)\eta\mu^2\alpha-f(\beta)\sigma\upsilon\nu^2\alpha=}$$
$$\mathbf{=f(\alpha)\cdot\left(1-\eta\mu^2\alpha\right)-f(\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha=}$$
$$\mathbf{=f(\alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha-f(\beta)\sigma\upsilon\nu^2\alpha=}$$
$$\mathbf{=\left(f(\alpha)-f(\beta)\right)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha\quad(1)}$$
$$\mathbf{g(\beta)=f(\beta)-f(\alpha)\cdot\eta\mu^2\beta-f(\beta)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\beta=}$$
$$\mathbf{=f(\beta)\cdot\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\beta\right)-f(\alpha)\cdot\eta\mu^2\beta=}$$
$$\mathbf{=f(\beta)\cdot\eta\mu^2\beta-f(\alpha)\cdot\eta\mu^2\beta=}$$
$$\mathbf{=\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)\cdot\eta\mu^2\beta\quad(2)}.$$

Από τις σχέσεις $\mathbf{(1)}$ και $\mathbf{(2)}$ έχουμε:

$$\mathbf{g(\alpha)\cdot g(\beta)=-\left(f(\beta)-f(\alpha)\right)^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\alpha\cdot\eta\mu^2\beta<0}.$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano**, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{g(\xi)=0}$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

Αν μία συνάρτηση $\mathbf{f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{[\alpha,\beta]}$ και $\mathbf{f(\alpha)\neq 0}$, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\mathbf{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{\frac{f(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha}}.$$

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\beta-\alpha} \quad (1) \text{ με } x\neq\alpha,$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

Η εξίσωση (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)=0$$

Θεωρώντας τώρα τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(x)(\beta-\alpha)-(x-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big),$$

αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

$$g(\alpha)=f(\alpha)(\beta-\alpha)-(\alpha-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)=$$
$$=f(\alpha)(\beta-\alpha) \quad (2)$$
$$g(\beta)=f(\beta)(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)\big(f(\alpha)+f(\beta)\big)=$$
$$=(\beta-\alpha)\big(f(\beta)-f(\alpha)-f(\beta)\big)=$$
$$=-f(\alpha)(\beta-\alpha) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$g(\alpha).g(\beta)=-f^2(\alpha)(\beta-\alpha)^2<0$$

Οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα του **Bolzano**, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=0$.

Επειδή όμως $\xi\neq\alpha$, το συγκεκριμένο ξ θα είναι ρίζα της (1).

ΑΣΚΗΣΗ 14

Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\beta)\neq 0$, αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi-\beta}=\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{\alpha-\beta}.$$

Υπόδειξη

Εργαζόμαστε ανάλογα με την προηγούμενη άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ 15

Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον (διαφορετικά μεταξύ τους) $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|=\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{m+n}.$$

(όπου m,n θετικοί διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί)

Λύση

Εφόσον m,n θετικοί διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί υποθέτουμε (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι:

$$m=n+1.$$

Εφαρμόζοντας τώρα ένα απο τους τρόπους της *Άσκησης 1*, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_1)=\frac{mf(\alpha)+nf(\beta)}{m+n} \quad (1).$$

Όμοια αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi_2)=\frac{nf(\alpha)+mf(\beta)}{m+n} \quad (2).$$

Θα μπορούσαμε βέβαια το ξ_1 της σχέσης (1) να το είχαμε ονομάσει ξ_2 και το ξ_2 της σχέσης (2) να το είχαμε ονομάσει ξ_1.

Σε οποιαδήποτε περίπτωση όμως, αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) και πέρνουμε:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|=\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{m+n}.$$

Τα ξ_1 και ξ_2 είναι διαφορετικά μεταξύ τους, διότι αν υποθέσουμε $\xi_1=\xi_2$, τότε $f(\xi_1)=f(\xi_2)$, οπότε $f(\alpha)=f(\beta)$ άτοπο.

Γενικεύοντας την παραπάνω άσκηση θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε την εξής άσκηση:

ΑΣΚΗΣΗ 16

Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον (διαφορετικά μεταξύ τους) ξ_1,ξ_2 στο (α,β) τέτοια ώστε:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|=\frac{|m-n|}{m+n}|f(\beta)-f(\alpha)|.$$

(όπου m,n θετικοί ακέραιοι αριθμοί)

ΑΣΚΗΣΗ 17

Αν μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και n θετικός ακέραιος, αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον (διαφορετικά μεταξύ τους) ξ_1,ξ_2 στο (α,β) τέτοια ώστε:

$$|f(\xi_1)-f(\xi_2)|=\frac{|f(\beta)-f(\alpha)|}{2n+1}.$$